



تشریحی ۱۳۹۸ ساده

①

بارم: ۱

تابع $f(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ با دامنه $(2, a)$ اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

تشریحی ۱۳۹۹ متوسط

②

بارم: ۱

دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید.

$$y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{3} x$$

تشریحی ۱۳۹۹ ساده

③

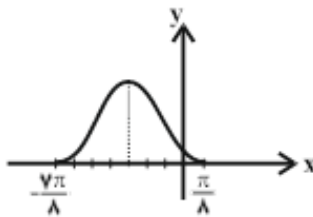
بارم: ۱

دوره تناوب تابع $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos^3 x + \cos^3\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)\sin x$ کدام است؟

تشریحی ۱۳۹۷ متوسط

④

بارم: ۱

نمودار زیر، تابع $y = \sin^2(ax + b\pi)$ را در یک دوره تناوب نمایش می دهد. $a + b$ کدام می تواند باشد؟

تشریحی قلم چی ۱۳۹۸ ساده

⑤

بارم: ۲.۵

تابع $y = 3\cos 2x + 2$ را در نظر بگیرید:

الف) دوره تناوب و مقدار می نیم این تابع را به دست آورید.

ب) نمودار این تابع نسبت به نمودار تابع $y = \cos x$ در امتداد محور x و محور y ها چه تغییراتی دارد؟

تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

⑥

بارم: ۱

خط $y = -\frac{1}{3}$ ، نمودار تابع $f(x) = 2\cos\left(\frac{3\pi x}{4}\right) - 1$ را در بازه $\left(0, \frac{5}{3}\right)$ چند بار قطع می کند؟

تشریحی ۱۳۹۹ متوسط

⑦

بارم: ۱

تابع متناوب f با دامنه $\mathbb{R}$ و دوره تناوب ۴، در فاصله $[1, 5]$ به صورت $f(x) = \begin{cases} 2\sin \frac{\pi}{4}x & ; 1 \leq x < 3 \\ -2x + 4 & ; 3 \leq x < 5 \end{cases}$ تعریف شده است. مقدار $f(102/5)$ چقدر است؟

تشریحی ۱۳۹۹ دشوار

⑧

بارم: ۱

طول نقاط برخورد نمودار تابع $f(x) = \sin ax$ با محور x ها، $\frac{1}{4}$ برابر طول نقاط برخورد نمودار تابع $g(x) = \sin x$ با محور x هاست. در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ ، نمودار دو تابع f و g در چند نقطه مشترک اند؟

(۹)

دوره تناوب تابع $y = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$ کدام است؟

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱

(۱۰)

تابع $y = 1 - 2 \cos^2 x$ را در نظر بگیرید:

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

بارم: ۲

الف) مقدار ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب آن را به دست آورید.

ب) آن را رسم کنید.

(۱۱)

معادله ی یک تابع سینوسی $y = a \sin(bx) + c$ را بنویسید که برد آن $[-4, 4]$ و دوره تناوب اصلی آن ۲ است.

متوسط

نهایی ۱۴۰۱

بارم: ۱

(۱۲)

جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۸

بارم: ۱.۵

الف) اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \leq f(x_2)$ ، آنگاه تابع f را می نامیم.

ب) اگر تابع $f(x)$ و $g(x)$ وارون یکدیگر باشند، آنگاه برای هر $x \in D_g$ داریم: $(fog)(x) = \dots\dots\dots$

پ) برای رسم نمودار تابع $y = f(2x)$ کافی است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در ضرب کنیم.

ت) تابع $y = a \sin 3x + 4$ دارای ماکزیمم است.

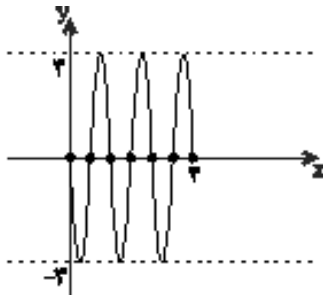
(۱۳)

شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. حاصل $a \cdot b$ کدام است؟

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱



(۱۴)

دوره تناوب تابع با ضابطه $y = 3 \sin cx - 2$ برابر π است. قدرمطلق مجموع مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع با ضابطه

ساده

تشریحی ۱۳۹۷

بارم: ۱

$y = \pi \sin(-x) + c$ کدام است؟

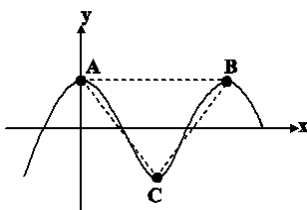
(۱۵)

شکل زیر نمودار تابع $f(x) = a^x \cos ax$ است. اگر مساحت مثلث ABC برابر با 8π واحد مربع باشد، مقدار مثبت a کدام است؟

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

بارم: ۱

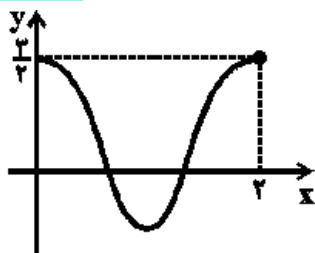


۱۶

تشریحی ۱۳۹۹

ساده

بارم: ۱



اگر نمودار $y = a + \sin \pi(bx + \frac{1}{4})$ به صورت مقابل باشد، بیشترین مقدار $a+b$ کدام است؟

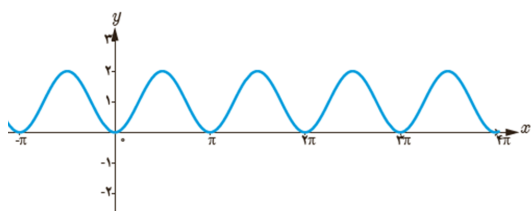
۱۷

نهایی ۱۴۰۲

ساده

بارم: ۱

نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه $f(x) = a \sin bx + c$ یا $f(x) = a \cos bx + c$ است. با تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را مشخص نمایید.



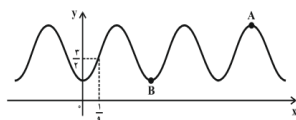
۱۸

تشریحی ۱۳۹۹

دشوار

بارم: ۱

اگر نمودار تابع $f(x) = 1 + a \sin^2(\frac{3\pi}{2}x)$ به صورت زیر باشد، شیب خط گذرنده از نقاط A و B چقدر است؟



۱۹

تشریحی قلمچی ۱۳۹۹

متوسط

بارم: ۲

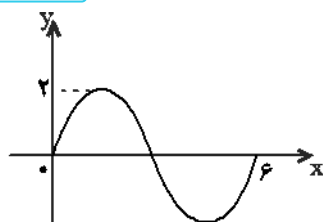
ضابطه تابعی به صورت $f(x) = a \sin(bx) + c$ را چنان تعیین کنید که ماکزیمم و می نیمم آن به ترتیب برابر ۷ و -۳ و دوره تناوب آن برابر 4π باشد.

۲۰

تشریحی ۱۳۹۹

ساده

بارم: ۱



شکل روبه رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(2b\pi x)$ است. حاصل ab کدام است؟

۲۱

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

بارم: ۱

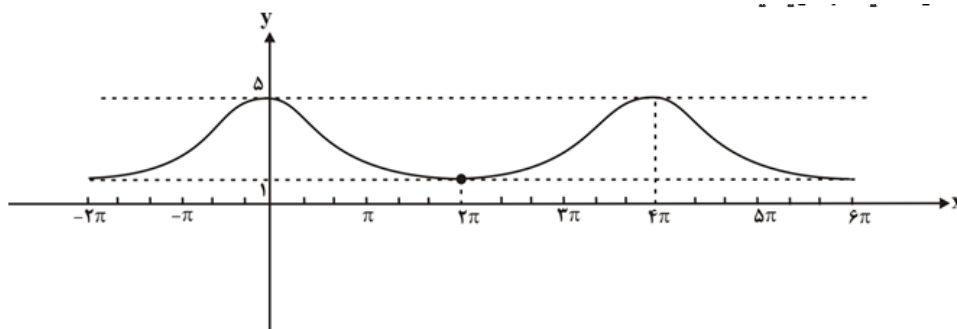
دوره تناوب تابع $f(x) = 2 \cos^2(2\pi x + \frac{\pi}{3}) - 3$ چقدر است؟

(۲۲)

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۹

متوسط

بارم: ۲.۲۵

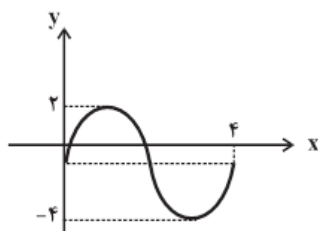
الف) دوره تناوب و مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع $y = -\frac{1}{8}\cos(\pi x) + 1$ را تعیین کنید.ب) نمودار زیر مربوط به تابعی به فرم $y = a \cos bx + c$ است. ضابطه آن را با ذکر دلیل بنویسید.

(۲۳)

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

بارم: ۱

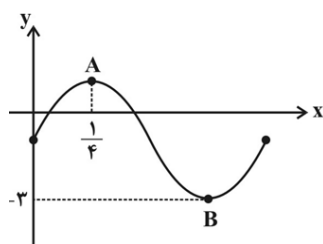
اگر نمودار تابع $f(x) = a + b \sin cx$ به صورت شکل زیر باشد، مقدار $f\left(\frac{31}{3}\right)$ کدام است؟

(۲۴)

تشریحی ۱۳۹۹

ساده

بارم: ۱

قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 2 \sin b\pi x + c$ به صورت زیر رسم شده است. طول پاره خط AB کدام است؟

(۲۵)

تشریحی ۱۳۹۹

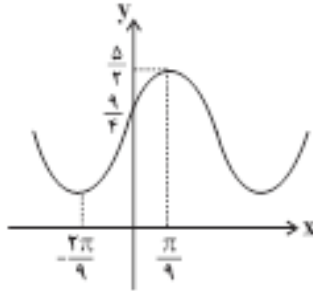
ساده

بارم: ۱

در کدام تابع زیر، ماکزیمم تابع از مینیمم آن ۵ واحد بیشتر بوده و دوره تناوب آن $\frac{1}{3}$ است؟

(۲۶)

شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \sin\left(bx + \frac{\pi}{6}\right) + c$ را نشان می‌دهد. مقدار $f(\pi)$ کدام است؟



بارم: ۱

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

(۲۷)

به کمک نمودار تابع $f(x) = \tan x$ در بازه $[0, 2\pi]$ نمودار تابع $g(x) = -f\left(\frac{x}{2}\right)$ را رسم نموده، دامنه و برد آن را مشخص کنید. ۲

متوسط

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۷

(۲۸)

مقدار $\sin 15^\circ$ را بیابید.

بارم: ۱

ساده

نهایی ۱۳۹۹

(۲۹)

با توجه به محورهای سینوس و تانژانت در دایره مثلثاتی، در حالت های زیر، $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید. (با رسم ۲ شکل)

ساده

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۷

الف) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

ب) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

(۳۰)

دوره تناوب و برد تابع $y = -2 \sin \frac{x}{3} - 1$ را مشخص کنید.

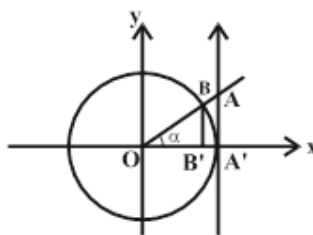
بارم: ۱

ساده

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۸

(۳۱)

با توجه به دایره مثلثاتی زیر، اگر $AA' = \frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد، مقدار OB' کدام است؟



بارم: ۱

ساده

تشریحی ۱۳۹۷

(۳۲)

تابع متناوب f با دامنه $\mathbb{R}$ و دوره تناوب ۴، در فاصله $(1, 5)$ به صورت

$$f(x) = \begin{cases} 2 \sin \frac{\pi}{4} x; & 1 \leq x < 3 \\ -2x + 4; & 3 \leq x < 5 \end{cases}$$

مقدار: ۱

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

$f(102/5)$ کدام است؟

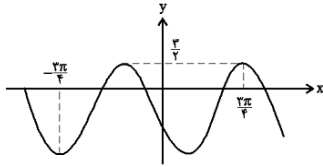
۳۳

تشریحی ۱۳۹۹

ساده

اگر نمودار روبه رو متعلق به تابع $y = -\frac{3}{4} + a \sin bx$ باشد، کدام است؟

بارم: ۱



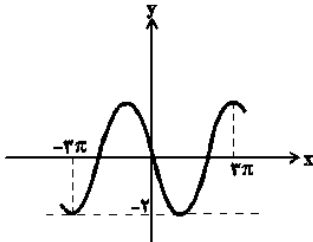
۳۴

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

نمودار زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \sin(bx + \pi)$ را نشان می‌دهد. مقدار $f(\frac{17\pi}{4})$ چقدر است؟

بارم: ۱



۳۵

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

اگر کم‌ترین مقدار تابع $y = |a| + 3a \sin(a\pi x + \frac{\pi}{3})$ برابر ۴- باشد، دوره تناوب آن کدام است؟

بارم: ۱

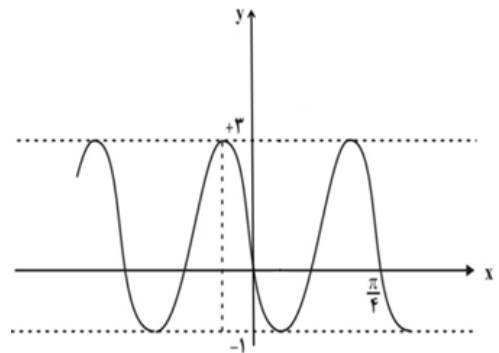
۳۶

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۷

متوسط

نمودار شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a \cos(bx + \frac{2\pi}{3}) + c$ را نشان می‌دهد. مقادیر a ، b و c را بیابید.

بارم: ۲



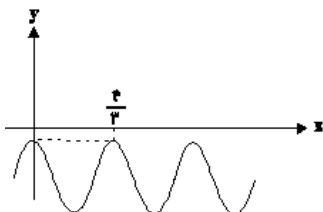
۳۷

تشریحی ۱۴۰۰

متوسط

بخشی از نمودار تابع $f(x) = a + \frac{1}{3} \cos \pi a x$ در شکل زیر رسم شده است. کم‌ترین مقدار تابع کدام است؟

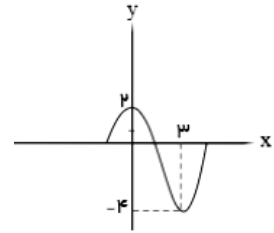
بارم: ۱



(۳۸)

نمودار تابع $f(x) = a \cos bx + c$ به صورت زیر است، ضابطه این تابع را بیابید.

بارم: ۱



(۳۹)

اگر دوره تناوب تابع $f(x) = \sin(ax)$ ، $T = \frac{\pi}{3}$ باشد و $f(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ، آنگاه ضابطه تابع f را بیابید.

بارم: ۲

(۴۰)

تعداد نقاط تلاقی نمودار تابع $y = -3 \sin(2\pi x) + 1$ با خط $y = -1$ در بازه $[0, 1/5]$ کدام است؟

بارم: ۱

(۴۱)

مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $4 \sin x \sin(\frac{3\pi}{4} - x) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

بارم: ۱

(۴۲)

مجموع جواب‌های متمایز معادله $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

بارم: ۱

(۴۳)

اگر انتهای کمان x در ناحیه اول دایره مثلثاتی بوده و داشته باشیم: $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 5$ ، آنگاه مقدار $\cot x$ کدام است؟

بارم: ۱

(۴۴)

اگر $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 2$ باشد، آنگاه مقدار $\sin 2x$ کدام است؟

بارم: ۱

(۴۵)

به سؤالات زیر با ذکر دلیل پاسخ دهید:

بارم: ۲.۲۵

(الف) درجه عبارت $p(x) = \sqrt{x^2} (1-x)^3$ را در صورت وجود تعیین کنید.

(ب) آیا تابع $f(x) = |1-x|$ در بازه $(-\infty, 1]$ نزولی است؟ چرا؟

(پ) آیا اگر تابعی در بازه ای اکیداً صعودی باشد، در آن بازه صعودی نیز هست؟ چرا؟

(ت) آیا با انبساط و انقباض عمودی یک تابع، دامنه آن تغییر می کند؟ چرا؟

(۴۶)

معادله مثلثاتی $\cos(2 \cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

بارم: ۱

(۴۷)

مقدار عددی عبارت $(\frac{1}{3} - \sin \frac{\pi}{13})(\frac{1}{3} + \cos \frac{5\pi}{13})$ را حساب کنید.

بارم: ۱

(۴۸)

درست یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

بارم: ۱

دامنه‌ی تابع $f(x) = -2 \tan(\frac{x}{3})$ برابر $x \neq 3k\pi + \frac{2\pi}{3}$ است.

(۴۹)

نسبت های سینوس و کسینوس را برای زاویه های $\frac{\pi}{8}$ و $\frac{\pi}{12}$ به دست آورید.

بارم: ۲

تشریحی قلمچی ۱۳۹۹

متوسط

(۵۰)

مجموع جواب های معادله $2\sin^2 x - \sin x = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

بارم: ۱

تشریحی ۱۳۹۹

دشوار

(۵۱)

جواب کلی معادله $\sin^3 x - \sin x = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

بارم: ۱

تشریحی ۱۳۹۹

دشوار

(۵۲)

جواب کلی معادله $\cos(\pi - x) \sin(\frac{3\pi}{4} - x) - \sin(\pi + x) \cos(\frac{\pi}{4} + x) = -\sin^2 \frac{5\pi}{4}$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

بارم: ۱

تشریحی ۱۳۹۶

متوسط

(۵۳)

حاصل عبارت $\frac{\cos 10x}{\sin x}$ به ازای $x = 7/5^\circ$ کدام است؟

بارم: ۱

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

(۵۴)

معادله $\sin x (\tan x + \cot x) = 1$ چند جواب حقیقی در بازه $[0, 2\pi]$ دارد؟

بارم: ۱

تشریحی ۱۳۹۷

دشوار

(۵۵)

مساحت مثلثی برابر $8\sqrt{2}$ سانتی مترمربع است. اگر طول اضلاع آن ۴ و ۸ سانتی متر باشد، چند مثلث با این خاصیت می توان ساخت؟

بارم: ۲

تشریحی قلمچی ۱۳۹۹

متوسط

(۵۶)

اگر $\sin^4(\frac{\pi}{4} + x) = \frac{1}{3} + \sin^4 x$ ، آن گاه مقدار مثبت $\tan x$ کدام است؟

بارم: ۱

تشریحی ۱۳۹۶

متوسط

(۵۷)

از معادله $(\cos 3x)(\cos \frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{4} - \cos^2 x$ چند جواب برای x در فاصله $(0, 2\pi)$ بدست می آید؟

بارم: ۱

تشریحی ۱۳۹۸

دشوار

(۵۸)

جواب کلی معادله $\cos 4x + 2\sin^2 x = 1$ کدام است؟

بارم: ۱

تشریحی ۱۳۹۵

دشوار

(۵۹)

جواب کلی معادله $2\cos(x + \frac{\pi}{4})\cos^3 x + \sin(x + \frac{\pi}{4})\sin x = -\frac{1}{4}$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

بارم: ۱

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

(۶۰)

معادله $\sin^2 x = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

بارم: ۱

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

(۶۱)

محل برخورد تابع $y = \cos 3x - \cos x$ با محور x ها (ریشه های تابع) را در بازه $[0, \pi]$ به دست آورید.

بارم: ۱

نهایی ۱۴۰۲

متوسط

(۶۲)

مجموع جواب های معادله $\frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} = \frac{1}{4}$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

بارم: ۱

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

(۶۳)

معادله مثلثاتی $\sin 2x = \sin x$ را حل کنید.

بارم: ۱

نهایی ۱۴۰۱

متوسط

۶۴

دشوار

تشریحی ۱۳۹۴

بارم: ۱

معادله $\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{3} + \cos 2x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۶۵

متوسط

تشریحی ۱۳۹۵

بارم: ۱

یکی از جواب‌های معادله $\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1 = 0$ مثلثاتی $(k \in \mathbb{Z})$ کدام است؟

۶۶

متوسط

نهایی ۱۴۰۰

بارم: ۱

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2 \cos 2x - \sqrt{3} = 0$

ب) $2 \cos 3x + 1 = 0$

۶۷

ساده

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۷

بارم: ۲

جواب‌های کلی معادله $\sin(5x) = \sin(2x)$ را به دست آورید.

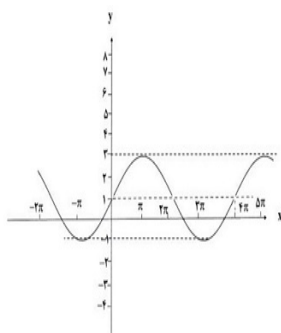
۶۸

متوسط

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۷

بارم: ۲

الف) نمودار زیر مربوط به یک تابع مثلثاتی است. ضابطه این تابع را بنویسید.



ب) دوره تناوب تابع $y = \sin 2x \cos 4x \cos 2x$ را به دست آورید.

۶۹

دشوار

تشریحی ۱۳۹۹

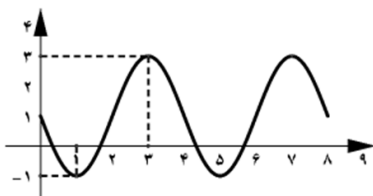
مجموع طول نقاطی که به ازای آن‌ها تابع $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ با دامنه $[-\frac{9\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}]$ دارای حداقل مقدار ممکن می‌باشد، کدام است؟

۷۰

متوسط

نهایی ۱۴۰۲

ضابطه مربوط به نمودار تابع زیر به شکل $y = a \sin bx + c$ یا $y = a \cos bx + c$ می‌باشد. مقدار ماکزیمم آن برابر با و مقدار مینیمم آن برابر با و طول دوره تناوب آن برابر با است. ضابطه نمودار:



۷۱

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

بارم: ۱

مجموع جواب‌های معادله $\cos 2x = 3 \cos x - 2$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۷۲

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

تمام جواب‌های معادله $\cos 4x + \cos 2x = 0$ به صورت $x = k\pi + \frac{i\pi}{6}$ است. مجموعه کل مقادیر قابل قبول برای i کدام است؟

$(k \in \mathbb{Z})$

(۷۳)

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

بارم: ۱

معادله $\frac{\sin^2 x}{2} = \frac{5}{8} - \cos^2 x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

(۷۴)

تشریحی ۱۳۹۹

دشوار

بارم: ۱

اگر $\cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha = \frac{1}{4}$ باشد مقدار $\sin \alpha$ کدام می‌تواند باشد؟

(۷۵)

نهایی ۱۴۰۲

متوسط

بارم: ۱

معادله مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\cos 2x + \sqrt{2} \sin x - 1 = 0$$

(۷۶)

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۸

متوسط

بارم: ۳

الف) دوره تناوب و مقدار می نیمم تابع $y = -4 \cos \frac{x}{4} + 3$ را به دست آورید.ب) معادله مثلثاتی $\sin 2x = \sin x$ را حل کنید.پ) نمودار تابع $y = \sin x - \sin 2x$ در نقطه‌ای به طول x محور x ها را قطع می‌کند. اگر $2\pi < x_0 < \pi$ باشد، مقدار x_0 را پیدا کنید.

(۷۷)

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

بارم: ۱

جواب کلی معادله $\sin^6 x + \cos^6 x = 1$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۷۸)

تشریحی ۱۳۹۶

دشوار

بارم: ۱

معادله مثلثاتی $\cos 2x = \sin 2x + 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

(۷۹)

نهایی ۱۴۰۲

ساده

بارم: ۱

حاصل عبارت $4 \sin x \cos x \cos 2x$ را به ازای $x = 7/5^\circ$ محاسبه کنید.

(۸۰)

تشریحی ۱۳۹۵

متوسط

بارم: ۱

معادله‌ی مثلثاتی $\sin 2x - 2 \tan x = 0$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چند جواب متمایز دارد؟

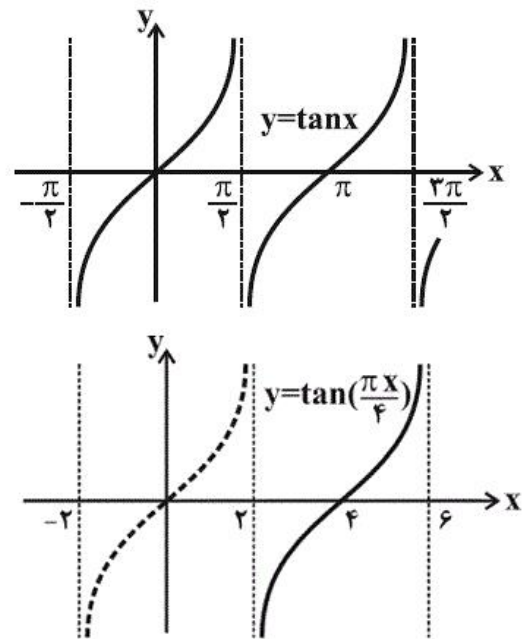
ساده

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۱

برای رسم نمودار تابع f ابتدا نمودار تابع $y = \tan x$ را رسم می‌کنیم. سپس طول نقاط روی این نمودار را در $\frac{f}{\pi}$ ضرب می‌کنیم.



پس حداکثر مقدار a برای این که تابع f روی دامنه‌اش یعنی بازه $(2, a)$ اکیداً صعودی باشد، برابر ۶ است.

متوسط

نهایی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۲

$$\begin{aligned} \max &= |a| + c = 1 + \sqrt{3} \\ \min &= -|a| + c = -1 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

ساده

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۳

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \sin x \\ &= \cos x \cdot \cos^2 x + (-\sin x)^2 \sin x = \cos^3 x - \sin^3 x \end{aligned}$$

از طرفی هم داریم:

$$f(x) = \cos^3 x - \sin^3 x = (\cos^2 x - \sin^2 x) \times (\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos 2x$$

دوره تناوب این تابع برابر $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ است.

$$\sin^r \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \Rightarrow \sin^r(ax + b\pi) = \frac{1 - \cos(2ax + 2b\pi)}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2ax + 2b\pi)$$

بنابراین دوره تناوب تابع این سؤال برابر است با $\frac{\pi}{|a|}$. از طرفی از نمودار مشخص است که $T = \pi$ است.

$$\Rightarrow \frac{\pi}{|a|} = \pi \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

حالت اول: $a = 1 \Rightarrow y = \sin^r(x + b\pi)$

$$y\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) = 0 \Rightarrow \sin^r\left(b + \frac{1}{\lambda}\right)\pi = 0$$

این یعنی $b + \frac{1}{\lambda}$ باید عددی صحیح باشد.

حالت دوم: $a = -1 \Rightarrow y = \sin^r(-x + b\pi)$

$$y\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) = 0 \Rightarrow \sin^r\left(b - \frac{1}{\lambda}\right)\pi = 0$$

این یعنی $b - \frac{1}{\lambda}$ باید عددی صحیح باشد.

حال اگر اعداد صحیح +1 و -1 را به ترتیب با جواب‌های متناظر به دست آمده برای آن‌ها جمع کنیم، عدد حاصل صحیح باقی خواهد ماند؛ بنابراین داریم:

$$a + b \pm \frac{1}{\lambda} = k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a + b = k \pm \frac{1}{\lambda}; k \in \mathbb{Z}$$

(الف)

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

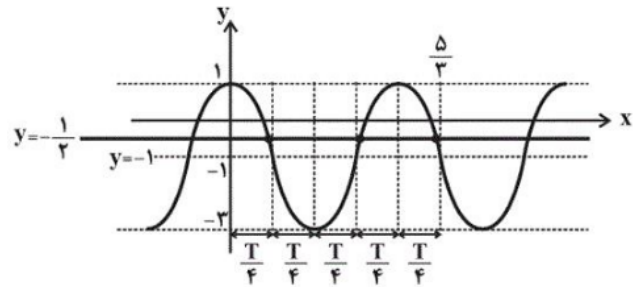
$$\text{Min } y = -|a| + c = -3 + 2 = -1$$

(ب) در امتداد محور xها با ضریب $\frac{1}{\varphi}$ منقبض (فشرده) می شود.

در امتداد محور yها با ضریب ۳ منبسط (کشیده) می شود و به اندازه ۲ واحد به بالا می رود.

روش اول:

نمودار تابع f و خط $y = -\frac{1}{2}$ در شکل زیر رسم شده‌اند.



لازم به ذکر است که دوره تناوب تابع f برابر است با $T = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{4}{3}$. همچنین طول بازه $\left(0, \frac{5}{3}\right)$ برابر $\frac{5T}{4}$ است.

مطابق شکل، خط موردنظر نمودار تابع f را در بازه $\left(0, \frac{5}{3}\right)$ سه بار قطع می‌کند.

روش دوم:

$$f(x) = 2 \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

یعنی کافی است، تعداد نقاط تلاقی نمودار تابع $y = \cos \frac{3\pi x}{2}$ را با خط $y = \frac{1}{4}$ در بازه $\left(0, \frac{5}{3}\right)$ به دست آوریم.

چون تابع f متناوب است، پس داریم:

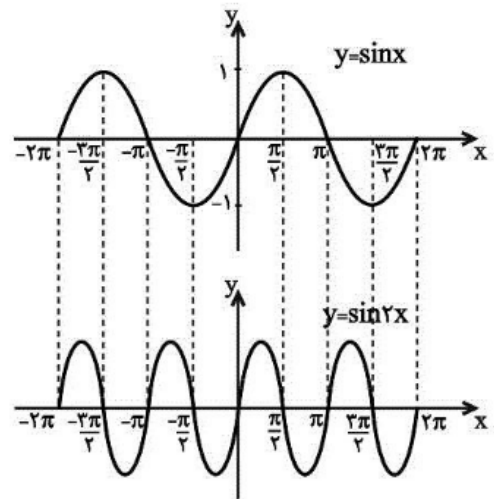
$$f(x + nT) = f(x), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$f(102/5) = f(2/5 + 25 \times 4) = f(2/5) = f\left(\frac{2}{5}\right)$$

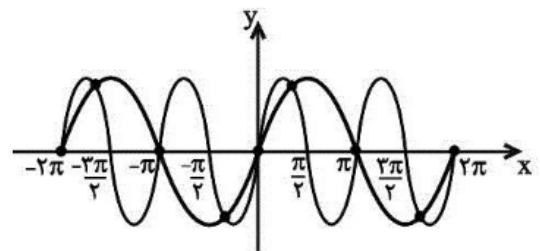
$$= 2 \sin \frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2}$$

با تقسیم طول نقاط برخورد نمودار تابع $y = \sin x$ با محور x ها بر a ، طول نقاط برخورد نمودار تابع $y = \sin ax$ با محور x ها به دست می‌آید، پس $a = ۲$ است.

نمودار دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار تابع $f(x) = \sin ۲x$ ، کافی است طول نقاط تابع $y = \sin x$ را بر دو تقسیم کنیم.



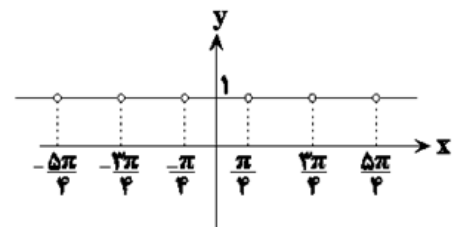
دو نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم. همانطور که مشاهده می‌شود، دو نمودار در ۹ نقطه مشترک‌اند.



توجه کنید که $a = -۲$ نیز قابل قبول است.

گزینه «۲»

با توجه به اتحاد $\cos ۲\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ، این تابع به صورت ثابت $y = ۱$ درمی‌آید. اما چون نقاط $x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$ در دامنه تابع نیستند، بنابراین نمودار تابع به صورت زیر و دوره تناوب آن $\frac{\pi}{۲}$ است.



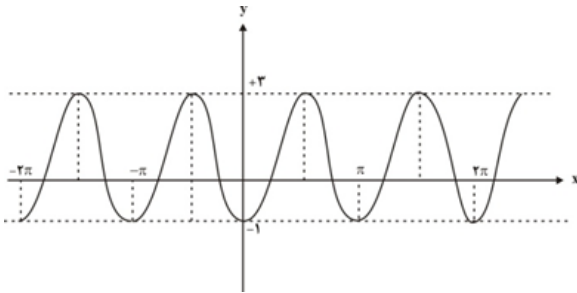
(الف)

$$y = 1 - 2 \cos 2x = c + a \cos bx$$

$$\Rightarrow a = -2, b = 2, c = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ماکزیمم} &= |a| + c = 3 \\ \text{مینیمم} &= -|a| + c = -1 \\ \text{دوره تناوب} &= T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \end{cases}$$

(ب)



$$|b| = \frac{2\pi}{2} = \pi \rightarrow b = \pm\pi$$

$$\rightarrow y = \pm 2 \sin(\pm\pi x)$$

$$|a| = \frac{2 - (-2)}{2} = 2 \rightarrow a = \pm 2$$

$$c = \frac{2 + (-2)}{2} = 0$$

(الف) صعودی

(ب) x

(پ) $\frac{1}{2}$ (ت) $|a| + 4$

با توجه به نمودار، تابع در بازه $[0, 3]$ سه بار تکرار شده است، پس دوره تناوب آن $T = 1$ است، لذا:

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 1 \Rightarrow |b| = 2$$

از طرفی با دقت در نمودار تابع $y = \sin x$ دیده می‌شود که جای نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع عوض شده است، پس a و b مختلف‌العلامت‌اند.

با فرض $a < 0$ و با توجه به اینکه ماکزیمم تابع برابر با $|a| = 3$ است، $a = -3$ و $b = 2$ به دست می‌آید.

$$\Rightarrow a \cdot b = -3 \times 2 = -6$$

توجه کنید که مقادیر $a = 3$ و $b = -2$ نیز قابل قبول‌اند.

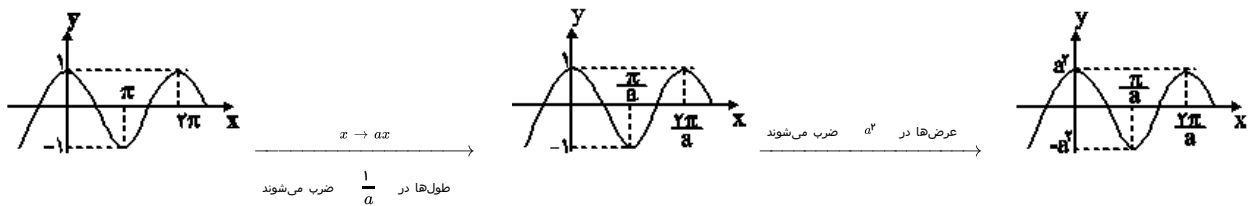
دوره تناوب $y = 3 \sin cx - 2$ برابر $\frac{2\pi}{|c|}$ است. پس:

$$\frac{2\pi}{|c|} = \pi \Rightarrow |c| = 2$$

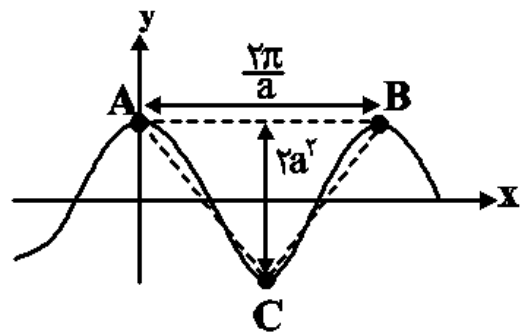
ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \pi \sin(-x) + c$ برابر $\pi + c$ و $-\pi + c$ می‌باشد. پس:

$$-\pi + c + \pi + c = 2c \Rightarrow |2c| = 2|c| = 4$$

نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y = \cos x$ رسم می‌کنیم:



حال برای مساحت مثلث ABC داریم:



$$S_{\triangle ABC} = \frac{\frac{2\pi}{a} \times 2a^2}{2} = \lambda\pi \xrightarrow{a>0} 2\pi a = \lambda\pi \Rightarrow a = 2$$

ساده

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۱۶

ابتدا ضابطه تابع را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$y = a + \sin(b\pi x + \frac{\pi}{4}) = a + \cos b\pi x$$

عرض از مبدأ تابع برابر $\frac{3}{4}$ است، داریم:

$$x = 0 \rightarrow a + \cos 0 = a + 1 = \frac{3}{4} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

از طرفی دوره تناوب نمودار تابع برابر ۲ است.

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|\pi} = 2 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

نمودار تابع کسینوس نسبت به محور y ها متقارن است، بنابراین هر دو مقدار b قابل قبول است. بیشترین مقدار a + b به ازای b = 1

$$(a + b)_{\max} = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

ساده

نهایی ۱۴۰۲

گزینه درست: null

سوال ۱۷

$$T = \pi = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow |b| = 2$$

$$|a| = \frac{2 - 0}{2} = 1$$

$$y = -\cos 2x + 1$$

$$c = \frac{2 + 0}{2} = 1$$

دشوار

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۱۸

$$f(\frac{1}{9}) = \frac{3}{4} \Rightarrow 1 + a \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}a = -\frac{1}{4} \Rightarrow a = -1$$

ضابطه تابع $f(x) = 1 + 2 \sin^2 \frac{3\pi x}{4}$ را به صورت زیر تغییر می‌دهیم:

$$f(x) = 1 + 2 \sin^2 \frac{3\pi x}{4} = 1 + 2 \left(\frac{1 - \cos 3\pi x}{2} \right) = 2 - \cos 3\pi x$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}, \quad \max = 2 + |-1| = 3, \quad \min = 2 - |-1| = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ مختصات: } (2/5T, 3) = (\frac{2}{3}, 3) \\ B \text{ مختصات: } (T, 1) = (\frac{2}{3}, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{شیب خط: } m_{AB} = \frac{3-1}{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}} = 2$$

متوسط

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۱۹

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \rightarrow b = \pm \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{b = \frac{1}{2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Max} = |a| + c \xrightarrow{\max=7} 7 = |a| + c \\ \text{Min} = -|a| + c \xrightarrow{\min=-3} -3 = -|a| + c \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفریق}} 10 = 2|a| \rightarrow |a| = 5 \rightarrow a = \pm 5 \rightarrow \boxed{a = 5}$$

$$7 = |5| + c \rightarrow \boxed{c = 2}$$

$$\boxed{f(x) = 5 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2}$$

با توجه به نمودار، تابع در بازه $[0, 6]$ ، یک بار تکرار شده است، پس دوره تناوب آن $T = 6$ است، لذا داریم:

$$\frac{2\pi}{|2b\pi|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{1}{6}$$

با توجه به نمودار تابع، مشخص است که a و b باید هم علامت باشند. حال با فرض مثبت بودن a و b داریم:

$$y_{\max} = |a| \xrightarrow{a>0} y_{\max} = a = 2 \xrightarrow{b=\frac{1}{6}} ab = \frac{1}{3}$$

توجه: مقادیر a و b می‌توانند هر دو منفی باشند و در این حالت نیز پاسخ همان $\frac{1}{3}$ است.

ابتدا توجه کنید که با توجه به اتحاد $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$ ضابطه تابع به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$f(x) = 1 + \cos\left(4\pi x + \frac{2\pi}{3}\right) - 3 = \cos\left(4\pi x + \frac{2\pi}{3}\right) - 2$$

$$\frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

بنابراین دوره تناوب تابع برابر است با:

$$a = -\frac{1}{\lambda}, \quad b = \pi, \quad c = 1$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$y \text{ مقدار ماکسیمم} = |a| + c = \frac{1}{\lambda} + 1 = \frac{9}{\lambda}$$

$$y \text{ مقدار مینیمم} = -|a| + c = -\frac{1}{\lambda} + 1 = \frac{7}{\lambda}$$

(ب)

مقدار ماکسیموم = ۵

$$\begin{cases} |a| + c = 5 \\ -|a| + c = 1 \end{cases} \rightarrow c = 3, |a| = 2 \xrightarrow{a>0} a = 2$$

مقدار مینیموم = ۱

$$T = 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{1}{2}$$

$$y = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 3, \quad b = \frac{1}{2}$$

[عدم تسلط به قوانین محاسبه مقادیر ماکسیمم و می نیمم عدم تشخیص مثبت بودن a عدم تشخیص منفی خور بودن کسینوس و محاسبه غلط]

$$\max(f) = 2 \Rightarrow a + |b| = 2(1)$$

$$\min(f) = -2 \Rightarrow a - |b| = -2(2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} |b| = 2, a = -1$$

دوره تناوب تابع برابر ۴ است، پس داریم:

$$\frac{2\pi}{|c|} = 4 \Rightarrow |c| = \frac{\pi}{2}$$

با توجه به نمودار باید $bc > 0$ باشد، پس هر دو حالت $\begin{cases} b = -3 \\ c = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$ یا $\begin{cases} b = 3 \\ c = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ قابل قبول است. بنابراین ضابطه f به صورت $f(x) = -1 + 3 \sin \frac{\pi x}{2}$ است و داریم:

$$f\left(\frac{31}{3}\right) = -1 + 3 \sin \frac{31\pi}{6} = -1 + 3 \sin\left(5\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -1 - 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1 - 3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2}$$

$$y_{\min} = -|a| + c = -2 + c = -3 \Rightarrow c = -1(1)$$

با توجه به نمودار تابع $b > 0$ است و همچنین مشخص است که:

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{f} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = 1 \xrightarrow{b>0} b = 2$$

از طرفی داریم:

$$y_{\max} = |a| + c = 2 - 1 = 1 \Rightarrow A \begin{vmatrix} \frac{1}{f} \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow B \begin{vmatrix} \frac{3}{f} \\ -3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{\frac{1}{f} + 16} = \sqrt{\frac{65}{f}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$$

$$\begin{cases} Max = \frac{3}{2} + \left| -\frac{5}{2} \right| = 4 \\ Min = \frac{3}{2} - \left| -\frac{5}{2} \right| = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف} = 4 - (-1) = 5$$

$$T = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3}$$

با توجه به نمودار: $f(0) = a \sin\left(0 + \frac{\pi}{6}\right) + c = \frac{a}{2} + c = \frac{9}{4} \quad (1)$

همچنین بیشترین مقدار تابع برابر $\frac{5}{2}$ است.

$$\Rightarrow a + c = \frac{5}{2} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} a - \frac{a}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}a = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, c = 2$$

اختلاف طول دو نقطه ماکزیمم و مینیمم متوالی در چنین توابعی نصف دوره تناوب است.

$$\Rightarrow \frac{T}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \longrightarrow |b| = 3 \Rightarrow b = \pm 3$$

با توجه به شکل نمودار، باید $ab > 0$ باشد. حال چون در معادله (۲) مقدار مثبت a را پذیرفته‌ایم، در اینجا نیز $b = 3$ را باید بپذیریم

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$$

$$\Rightarrow f(\pi) = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2 = \frac{7}{4}$$

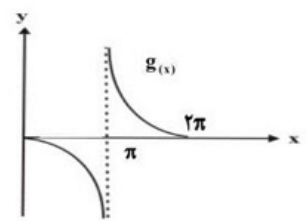
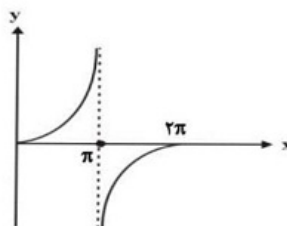
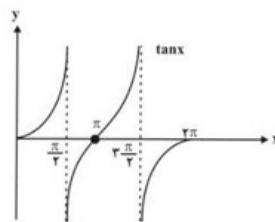
تذکر:

اگر مقادیر منفی را برای a و b در نظر بگیریم، داریم:

$$a = -\frac{1}{2}, b = -3, c = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{7}{4} \Rightarrow f(\pi) = \frac{29}{12}$$

که در این صورت نمودار این تابع با نمودار رسم شده در صورت سؤال متفاوت خواهد بود.



$$\Rightarrow D_g = [0, 2\pi] \quad , \quad R_g = \mathbb{R}$$

ساده

نهایی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۲۸

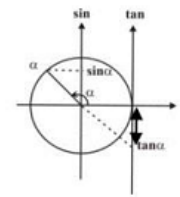
$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

ساده

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

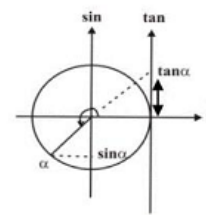
سوال ۲۹



(الف)

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha > 0 \\ \tan \alpha < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sin \alpha > \tan \alpha$$



(ب)

$$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha < 0 \\ \tan \alpha > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sin \alpha < \tan \alpha$$

ساده

تشریحی قلمچی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۳۰

$$T = \frac{2\pi}{|\frac{1}{3}|} = 6\pi$$

$$\max \text{ تابع} = |a| + c = |-2| + (-1) = 1$$

$$\min \text{ تابع} = -|a| + c = -|-2| + (-1) = -3$$

$$\rightarrow \text{برد تابع} \quad R = [-3, 1]$$

ساده

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۳۱

$$AA' = \tan \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

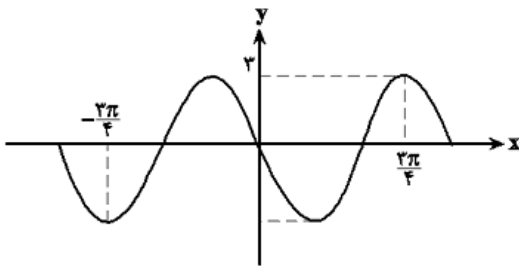
$$OB' = \cos \alpha \Rightarrow OB' = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

چون تابع f متناوب است، پس داریم:

$$f(x + nT) = f(x), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} f(102/5) &= f(2/5 + 25 \times 4) = f(2/5) = f\left(\frac{5}{2}\right) \\ &= 2 \sin \frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

با توجه به اینکه ورودی تابع $\sin x$ فقط در b ضرب شده است، بنابراین نمودار $\sin x$ در راستای محور x ها فشرده یا کشیده شده است و جابه جایی به سمت چپ و راست نداشته است. چون کل نمودار به اندازه y $-\frac{3}{4}$ در راستای محور y ها جابه جا شده، پس اگر نمودار را به اندازه y $\frac{3}{4}$ بالا ببریم به صورت زیر خواهد بود:



$$|a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3$$

فاصله ی نقاط $\frac{3\pi}{4}$ و $-\frac{3\pi}{4}$ به اندازه y $1/5$ برابر دوره ی تناوب تابع است. بنابراین:

$$\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}T \Rightarrow T = \pi$$

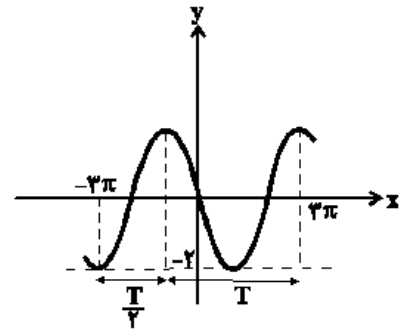
$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

با توجه به اینکه تابع بعد از $x=0$ نزولی است، بنابراین $ab < 0$ است. یعنی a و b مختلف علامت هستند.

$$\begin{cases} a = 3, b = -2 \Rightarrow ab = -6 \\ a = -3, b = 2 \Rightarrow ab = -6 \end{cases}$$

با ساده کردن ضابطه داده شده داریم:

$$f(x) = a \sin(bx + \pi) = -a \sin bx$$



با توجه به نمودار، ضرایب a و b هم علامت بوده و داریم:

$$\frac{3}{2}T = 6\pi \Rightarrow T = 4\pi$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

کمترین مقدار تابع برابر -2 است. بنابراین:

$$\begin{cases} -|a| = -2 \Rightarrow a = \pm 2 \\ b = \frac{1}{2}, a = 2 \text{ یا } a = -2, b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(x) = -2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f\left(\frac{17\pi}{2}\right) &= -2 \sin\left(\frac{17\pi}{4}\right) = -2 \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= -2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

در توابع مثلثاتی به فرم $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ ، کمترین مقدار تابع برابر $c - |a|$ می‌باشد.

بنابراین در این سؤال داریم:

$$y_{\min} = |a| - 3|a| = -2|a| = -4 \Rightarrow |a| = 2$$

$$\Rightarrow \text{دوره تناوب} : T = \frac{2\pi}{|a\pi|} = \frac{2}{|a|} \xrightarrow{|a|=2} T = 1$$

طبق روابط کتاب درسی داریم:

$$\begin{aligned} y_{\max} &= |a| + c = ۳ \\ y_{\min} &= -|a| + c = -۱ \end{aligned} \Rightarrow c = ۱, |a| = ۲$$

اما چون تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد، داریم:

$$a \cos\left(\frac{۲\pi}{۳}\right) + ۱ = ۰ \Rightarrow a = ۲$$

حال تابع به شکل $y = ۲ \cos\left(bx + \frac{۲\pi}{۳}\right) + ۱$ در می‌آید. از طرفی از شکل بر می‌آید که

$$T = \frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow |b| = ۸$$

اما با توجه به شکل مقدار مثبت یعنی $b = ۸$ قابل قبول است. در نتیجه داریم:

$$y = ۲ \cos\left(۸x + \frac{۲\pi}{۳}\right) + ۱$$

دوره تناوب نمودار تابع برابر $\frac{۴}{۳}$ است، داریم:

$$T = \frac{۲\pi}{|a|\pi} = \frac{۲}{|a|} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow |a| = \frac{۳}{۲}$$

چون نمودار کاملاً زیر محور x ‌ها قرار دارد، مقدار منفی را می‌پذیریم:

$$\Rightarrow f(x) = \frac{۱}{۳} \cos \frac{۳\pi x}{۲} - \frac{۳}{۲}$$

بیشترین مقدار این تابع برابر $-\frac{۷}{۶}$ و کمترین مقدار آن $-\frac{۱۱}{۶}$ است.

تفاضل طول نقاط ماکزیمم و مینیمم متوالی برابر با نصف دوره تناوب است.

$$\frac{T}{۲} = ۳ \Rightarrow T = ۶ \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|} = ۶ \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{۳} \xrightarrow{b>۰} b = \frac{\pi}{۳}$$

$$\left. \begin{aligned} \max f &= |a| + c = ۲ \\ \min f &= -|a| + c = -۴ \end{aligned} \right\} \Rightarrow ۲c = -۲ \Rightarrow c = -۱ \rightarrow |a| = ۳ \xrightarrow{a>۰} a = ۳$$

$$f(x) = ۳ \cos\left(\frac{\pi}{۳}x\right) - ۱$$

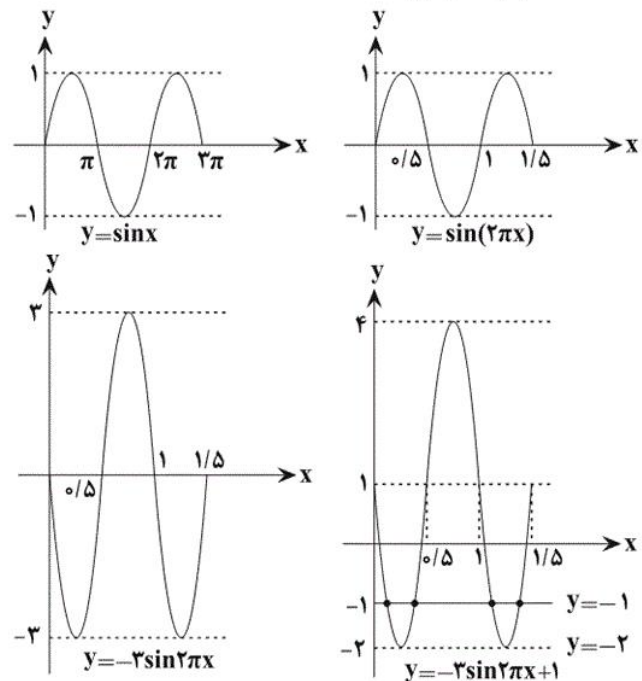
$$f(x) = \sin ax \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|} \rightarrow \frac{2\pi}{|a|} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |a| = 4 \Rightarrow a = \pm 4$$

$$\begin{cases} a = 4 \Rightarrow f(x) = \sin 4x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a = -4 \Rightarrow f(x) = \sin(-4x) \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

با توجه به فرض سوال نتیجه می گیریم:

$$f(x) = \sin(-4x)$$

برای رسم تابع $y = -3\sin(2\pi x) + 1$ ، ابتدا نمودار $y = \sin x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم می کنیم. سپس طول نقاط دامنه تابع $y = \sin x$ را بر 2π تقسیم کرده تا شکل $y = \sin(2\pi x)$ به دست آید. در مرحله بعد عرض نقاط منحنی را سه برابر کرده و نسبت به محور x ها قرینه می کنیم تا تابع $y = -3\sin(2\pi x)$ به دست آید. در مرحله آخر منحنی را یک واحد به بالا می بریم تا تابع $y = -3\sin(2\pi x) + 1$ حاصل شود. نمودار این تابع در چهار نقطه خط $y = -1$ را قطع می کند.



$$4 \sin x \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 \Rightarrow -4 \sin x \cos x = 1$$

$$\Rightarrow -2 \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} & (1) \\ 2x = 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} & (2) \end{cases}$$

چون جوابها را در بازه $[0, 2\pi]$ می خواهیم در جواب (۱) مقادیر $k = 1, 2$ و در جواب (۲) نیز $k = 0, 1$ را جایگزین می کنیم:

$$x = \frac{11\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}$$

$$\text{مجموع جوابها} = \frac{\pi(11+23+7+19)}{12} = \frac{60\pi}{12} = 5\pi$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۴۲

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \Rightarrow (2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$$

$$\xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ریشه ها} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۴۳

می‌دانیم که:

$$\begin{cases} \sin 2x = 2\sin x \cos x \\ 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x \end{cases}$$

$$\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{2\sin x \cos x}{2\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \tan x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cot x = \cos x$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۴۴

با استفاده از روابط $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ و $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$ داریم:

$$\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{2\sin x \cos x}{2\cos^2 x} = \tan x = 2$$

می‌دانیم که $1 + \cos 2x \geq 0$ است. بنابراین صورت کسر سؤال نیز باید مثبت باشد تا حاصل کسر عددی مثبت شود یعنی $\sin 2x > 0$ ، حال داریم:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + 2^2} = \frac{1}{5}$$

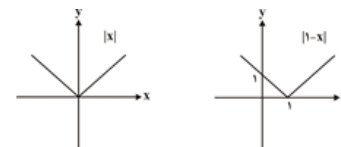
$$\Rightarrow \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{1}{5}\right) - 1 = -\frac{3}{5}$$

$$\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \pm \frac{4}{5} \xrightarrow{\sin 2x > 0} \sin 2x = \frac{4}{5}$$

الف) می دانیم $\sqrt{x^F} = |x^{\frac{F}{2}}| = x^{\frac{F}{2}}$ پس: $p(x) = x^{\frac{F}{2}}(1-x)^{\frac{F}{2}}$ و بنابراین عبارت چند جمله ای از درجه ۵ است.

ب) بله با توجه به شکل شاخه سمت چپ همواره نزولی است.



پ) بله زیرا با توجه به تعریف درست است.

$f(a) < f(b) \rightarrow$ برای هر a و b در دامنه f که $a < b$ f صعودی اکید

$f(a) \leq f(b) \rightarrow$ برای هر a و b در دامنه f که $a < b$ f صعودی

ت) خیر زیرا انبساط و انقباض عمودی فقط روی عرض اثر دارد و روی طول نقاط اثر ندارد.

[عدم تشخیص خارج کردن x^2 از زیر رادیکال و تبدیل عبارت به یک چند جمله ای عدم برقرارکردن ارتباط بین تعاریف اکیدا صعودی و صعودی عدم تشخیص تأثیر انقباض و انقباض عمودی روی عرض نقاط نه روی طول نقاط]

$$\cos x(2 \cos x - 9) = 5 \rightarrow 2 \cos^2 x - 9 \cos x - 5 = 0 \xrightarrow{\cos x = A} 2A^2 - 9A - 5 = 0$$

$$\rightarrow \Delta^2 = b^2 - 4ac = 81 + 40 = 121$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 + 11}{4} = 5 \rightarrow \cos x = 5 \text{ (امکان ندارد)} \\ A = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 - 11}{4} = -\frac{1}{2} \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{\cos x = \cos a \rightarrow x = 2k\pi \pm a} x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$A = \left(\frac{1}{2} - \sin \frac{\pi}{12}\right) \left(\frac{1}{2} + \cos \frac{5\pi}{12}\right)$$

$$\text{می دانیم: } \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{2} - \sin \frac{\pi}{12}\right) \left(\frac{1}{2} + \sin \frac{\pi}{12}\right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{4} - \sin^2 \frac{\pi}{12} \xrightarrow{\text{از طرفی}} \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$A = \frac{-1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}$$

نادرست

می دانیم:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{\lambda} = \frac{1 - \cos 2 \times \frac{\pi}{\lambda}}{2} \rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{\frac{\lambda}{2}}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow \boxed{\sin \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}}$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{\lambda} = \frac{1 + \cos 2 \times \frac{\pi}{\lambda}}{2} \rightarrow \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{\frac{\lambda}{2}}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow \boxed{\cos \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}}$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos 2 \times \frac{\pi}{12}}{2} \rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rightarrow \boxed{\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}}$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \cos 2 \times \frac{\pi}{12}}{2} \rightarrow \cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rightarrow \boxed{\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}}$$

$$2\sin^2 x - \sin x = \sin x (2\sin x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0 \text{ یا } x = 2\pi \\ \sin x = \frac{1}{2} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{6} \text{ یا } x = \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ برابر 3π است.

$$\sin^2 x - \sin x (\sin^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = \pm 1 \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

بنابراین می‌توانیم جواب کلی $x = k\frac{\pi}{2}$ را به عنوان جواب در نظر گرفت.

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$-\sin^2 \frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = -\frac{1}{4} \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۵۳

$$\frac{\cos 75^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{\cos(90^\circ - 15^\circ)}{\sin(75^\circ)} = \frac{\sin 15^\circ}{\sin 75^\circ}$$

$$= \frac{r \sin 75^\circ \cos 75^\circ}{\sin 75^\circ} = r \cos 75^\circ$$

دشوار

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۵۴

با استفاده از رابطه $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$ داریم:

$$\sin x \left(\frac{1}{\sin x \cos x} \right) = 1 \xrightarrow{\sin x \neq 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \xrightarrow{\cos x \neq 0} \cos x = 1$$

اما در نقاطی که $\cos x = 1$ است، $\sin x = 0$ است. پس معادله جواب حقیقی ندارد.

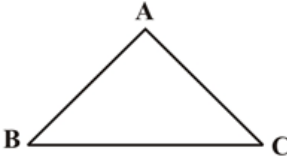
متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۵۵

می دانیم مساحت مثلث ABC برابر است با:



$$S = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{A}$$

$$AB = 4, AC = 8 \Rightarrow 8\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 4 \times 8 \times \sin \hat{A} \rightarrow \sin \hat{A} = \frac{8\sqrt{2}}{16} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \sin \hat{A} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{k=0} \hat{A} = \frac{\pi}{4} \\ \hat{A} = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{k=0} \hat{A} = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

دو مثلث ساخته می شود.

متوسط

تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۵۶

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

بنابراین تساوی داده شده به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\cos^2 x = \frac{1}{3} + \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3 - 3\tan^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$\Rightarrow 2\tan^2 x = 2 \Rightarrow \tan^2 x = 1 \Rightarrow \tan x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

توجه کنید که:

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

دشوار

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۵۷

می‌دانیم $\cos \frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2}$ پس داریم:

$$(\cos 3x) \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \cos^2 x \xrightarrow{\times(-2)} \cos 3x = \underbrace{2\cos^2 x - 1}_{\cos 2x}$$

پس معادله به صورت $\cos 3x = \cos 2x$ در می‌آید. حال داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + 2x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 3x = 2k\pi - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} \end{cases} \xrightarrow{x \in (0, 2\pi)} k = 1, 2, 3, 4$$

پس ۴ جواب داریم که عبارتند از $\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}$.

دشوار

تشریحی ۱۳۹۵

گزینه درست: null

سوال ۵۸

$$\cos 4x + 2\sin^2 x = 1 \Rightarrow \cos 4x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \cos 4x = \cos 2x$$

$$\Rightarrow 4x = 2k\pi \pm 2x \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + 2x \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi \\ 4x = 2k\pi - 2x \Rightarrow 6x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} \end{cases}$$

چون جواب‌های $x = k\pi$ در جواب کلی $x = \frac{k\pi}{3}$ قرار دارند، پس جواب کلی معادله $x = \frac{k\pi}{3}$ است.

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۵۹

$$2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos^2 x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin x = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -2\sin x \cos^2 x + \cos x \sin x = -\frac{1}{4}$$

$$\sin x \cos x (2\cos^2 x - 1) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{8}\sin 4x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 4x = 1 \Rightarrow 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}; k \in \mathbb{Z}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۶۰

$$\sin^2 x = \sin x \Rightarrow \sin x (\sin x - 1) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \quad \text{یا} \quad \sin x = 1$$

معادله $\sin x = 0$ در بازه داده شده ۳ جواب $0, \pi, 2\pi$ دارد.

معادله $\sin x = 1$ در این بازه یک جواب $x = \frac{\pi}{2}$ دارد.

بنابراین معادله داده شده در بازه $[0, 2\pi]$ ، چهار جواب دارد.

متوسط

نهایی ۱۴۰۲

گزینه درست: null

سوال ۶۱

$$3x = 2k\pi \pm x \rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi \rightarrow x = k\pi = \{0, \pi\} \in [0, \pi] \\ 3x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\} \in [0, \pi] \end{cases}$$

$$y = \cos 3x - \cos x \Rightarrow \cos 3x - \cos x = 0 \rightarrow \cos 3x = \cos x$$

$$\frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\cos x \neq -1} 2 \sin^2 x = 1 + \cos x$$

$$\Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) = 2 - 2 \cos^2 x = 1 + \cos x$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \xrightarrow{\cos x = t} 2t^2 + t - 1 = 0$$

در معادله بالا، مجموع ضریب t^2 و مقدار ثابت، برابر ضریب t است. بنابراین یکی از جواب‌های آن -1 و جواب دیگر $\frac{1}{2}$ است. واضح است که جواب -1 با توجه به شرط $\cos x \neq -1$ غیرقابل قبول است، بنابراین داریم:

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

جواب‌های بازه $[0, 2\pi]$ عبارتند از $\frac{\pi}{3}$ و $2\pi - \frac{\pi}{3}$ که مجموع آن‌ها برابر 2π است.

$$\sin 2x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2k\pi + \pi - x \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\cos^2 x \sin^2 x$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2}(1 - \cos^2 2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2x = \frac{1}{2} + \cos 2x$$

$$\Rightarrow \cos^2 2x - 2 \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x (\cos 2x - 2) = 0 \xrightarrow{\cos 2x \neq 2} \cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} x \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

$$\sin x + \sin x \cos x + \cos x + 1 = \sin x(1 + \cos x) + 1 + \cos x$$

$$= (1 + \cos x)(\sin x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi \end{cases}$$

نکته: $\cos u = \cos v \rightarrow u = 2k\pi \pm v$

الف) $2 \cos 2x - \sqrt{3} = 0 \rightarrow \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{12}$$

ب) $2 \cos 3x + 1 = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\frac{1}{2} = -\cos \frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$$\Rightarrow \cos 3x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{9}$$

ساده

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۶۷

می دانیم اگر $\sin x = \sin \alpha$ انگاه $x = 2k\pi + \alpha$ یا $x = 2k\pi + (\pi - \alpha)$ خواهد بود.

بنابراین:

$$\sin 5x = \sin 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x = 2k\pi + 2x \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \\ 5x = 2k\pi + \pi - 2x \Rightarrow 7x = (2k+1)\pi \Rightarrow x = \frac{2k+1}{7}\pi \end{cases}$$

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۶۸

$$\text{الف) } \begin{cases} |a| + c = 3 \\ -|a| + c = -1 \end{cases} \rightarrow c = 1, |a| = 2, T = \frac{2\pi}{5\pi - \pi} = \frac{1}{2} \rightarrow y = 2 \sin \frac{x}{2} + 1$$

پاسخ های صحیح دیگر نیز نمره داده می شود.

$$\text{ب) } y = \frac{1}{2} \sin 4x \cos 4x = \frac{1}{4} \sin 8x, T = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

دشوار

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۶۹

می دانیم که حداقل مقدار تابع $y = \sin \theta$ برابر با (-1) است و در نقاطی به طول های $\theta = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ به دست می آید، بنابراین برای اینکه بتوانیم راحت تر به جواب ها برسیم، مخرج همه کسرها را با ۱۲ می نویسیم:

$$x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \xrightarrow{-\frac{9\pi}{2} \leq x \leq \frac{4\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{24k\pi + 15\pi}{12}, \frac{-54\pi}{12} \leq x \leq \frac{16\pi}{12}$$

K	-۳	-۲	-۱	۰	۱
π	$-\frac{57\pi}{12}$	$-\frac{33\pi}{12}$	$-\frac{9\pi}{12}$	$\frac{15\pi}{12}$	$\frac{39\pi}{12}$

$$= \frac{-33\pi}{12} + \frac{-9\pi}{12} + \frac{15\pi}{12} = \frac{-27\pi}{12} = \frac{-9\pi}{4}$$

مقدار ماکزیمم = ۳

مقدار مینیمم = -۱

طول دوره تناوب = ۴

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 4 \rightarrow |b| = \frac{\pi}{2} \rightarrow b = \pm \frac{\pi}{2}$$

ضابطه نمودار:

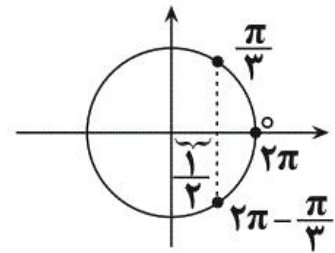
$$C = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1, |a| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{3 - (-1)}{2} = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

$$y = \pm 2 \sin\left(\pm \frac{\pi}{2}x\right) + 1 \rightarrow \begin{cases} y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1 \\ y = -2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$y = \pm 2 \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}x\right) + 1 \rightarrow \begin{cases} y = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1 \\ y = -2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1 \end{cases}$$

$$\cos 2x = 3 \cos x - 2 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 = 3 \cos x - 2$$

$$2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

جواب‌های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ مطابق دایره مثلثاتی عبارتند از:

$$\left\{0, \frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3}, 2\pi\right\}$$

پس مجموع جواب‌ها برابر است با: 4π

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۷۲

$$\cos 2x = t \Rightarrow \cos 4x = 2t^2 - 1$$

$$\cos 4x + \cos 2x = 0 \Rightarrow 2t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t = -1 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2}$$

$$\cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} = k\pi + \frac{3\pi}{2}$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = k\pi - \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow i \in \{1, 3, 5\}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۷۳

$$\frac{\sin^2 x}{2} = \frac{5}{8} - \cos^2 x \Rightarrow \sin^2 x + 2\cos^2 x = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + 2(1 - \sin^2 x) = \frac{5}{4} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

بنابراین معادله در بازه $[0, 2\pi]$ ۴ جواب دارد.

دشوار

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۷۴

$$\cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \overbrace{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}^1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{2}$$

متوسط

نهایی ۱۴۰۲

گزینه درست: null

سوال ۷۵

$$\cos 2x - \sqrt{2} \sin x - 1 = 0 \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x - \sqrt{2} \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x (-2\sin x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, \sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4}$$

(الف)

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

$$\min y = -|a| + c = -|-4| + 3 = -1$$

(ب)

$$\sin 2x - \sin x = 0 \rightarrow 2 \sin x \cos x - \sin x = 0 \rightarrow \sin x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow x = k\pi \\ 2 \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

(پ)

$$y = 0 \rightarrow \sin 2x = \sin x \xrightarrow{\pi < x_0 < 2\pi} x_0 = 2\pi - \frac{\pi}{3}$$

گزینه «۴»

می‌دانیم $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$ است. پس:

$$1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x \cos^2 x = 0 \Rightarrow (\sin x \cdot \cos x)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

$$\cos 2x = \sin 2x + 1$$

$$\Rightarrow 1 - \sin^2 x = \sin x \cos x + 1$$

$$\Rightarrow -\sin^2 x = \sin x \cos x \Rightarrow -\sin^2 x = \sin x \cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \\ -\sin x = \cos x \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, x = 2\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$4 \sin x \cos x \cos 2x = 2 \sin 2x \cos 2x = \sin 4x$$

$$x = \pi/5 \Rightarrow \sin 4(\pi/5) = \sin 3\pi/5 = \frac{1}{2}$$

$$\sin 2x - 2 \tan x = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x - \frac{2 \sin x}{\cos x} = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \left(\cos x - \frac{1}{\cos x} \right) = 0 \Rightarrow 2 \sin x \left(\frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{[0, 2\pi]} x = 0, \pi, 2\pi \\ \cos x = 1 \xrightarrow{[0, 2\pi]} x = 0, 2\pi \\ \cos x = -1 \xrightarrow{[0, 2\pi]} x = \pi \end{cases}$$

پس معادله‌ی مورد نظر دارای سه جواب متمایز 2π و 0 در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ است.