



تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۷

ساده

①

بارم: ۲

نمودار تابع $y = x^3 + 3x^2 + 3x$ را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

②

بارم: ۱

اگر f تابعی اکیداً صعودی و $f(1) = 0$ باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{x-4}{f(3-x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

تشریحی ۱۴۰۰

متوسط

③

بارم: ۱

تابع f در اعداد حقیقی اکیداً نزولی و $f(2) = 0$ است. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{x^2}{(x-1)f(x)}}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟

نهایی ۱۴۰۲

متوسط

④

بارم: ۱

اگر عبارت های گویا تعریف شده باشند، قدرمطلق تفاضل جواب های معادله $y = 1 - \frac{2}{x} = \frac{9x^2 - (x+3)^2}{2x-3}$ ، کدام است؟

تشریحی ۱۳۹۷

ساده

⑤

بارم: ۱

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 2x - x|x|$ در بازه $(-1, 1)$ چگونه است؟

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

⑥

بارم: ۱

در تابع درجه سوم $f(x) = -x^3 + ax^2 + x + 2$ ، رابطه $f(\frac{3}{4}) - f(2) + f(-\frac{3}{4}) = 5$ برقرار است. مقدار $f(1) + f(2)$ کدام است؟

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

⑦

بارم: ۱

اگر $f = \{(m, 1), (1, m), (4, 4)\}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشد، تابع $(f+g)(x)$ صعودی است. چند مقدار صحیح مثبت برای m قابل قبول است؟

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۷

ساده

⑧

بارم: ۲

نمودار تابع $y = (x+2)^3 - 1$ را از روی نمودار تابع $y = x^3$ در سه مرحله رسم نمایید.

نهایی ۱۳۹۹

دشوار

⑨

بارم: ۱

درجای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

(الف) درباره $(0, 1)$ ، نمودار تابع $y = x^3$ ، نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد.(ب) اگر $h(x) = 3x^4 + 2x^2 - 1$ باشد، آنگاه $h^{-1}(1)$ برابر است.

تشریحی ۱۳۹۹

ساده

⑩

بارم: ۱

معادله $\sqrt[3]{x+2} = x^3$ چند جواب حقیقی دارد؟

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

⑪

بارم: ۱

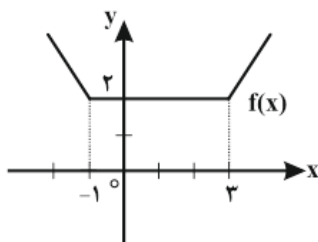
تابع f اکیداً نزولی است، هرگاه $f(3a-1) < f(a+1)$ باشد، آنگاه حدود a کدام است؟

(۱۲)

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $y = f(2 + |x|)$ در آن صعودی باشد، کدام است؟
 بارم: ۱



(۱۳)

تشریحی ۱۳۹۹

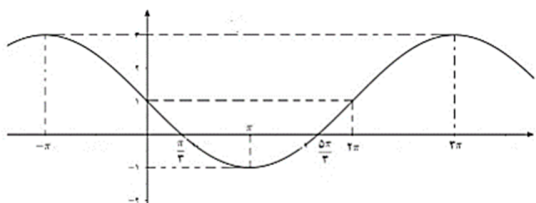
ساده

تابع $y = x|x - 4|$ در بازه $[a, b]$ نزولی است. حداکثر مقدار $b - a$ کدام است؟
 بارم: ۱

نهایی ۱۴۰۲

متوسط

با توجه به نمودار داده شده ضابطه تابع آن را بنویسید.
 بارم: ۱



(۱۵)

تشریحی ۱۳۹۹

ساده

اگر $f(x) = x^2 + 2x$ باشد، حداکثر مقدار a برای این که تابع $y = f(x - a)$ در بازه $[0, +\infty)$ صعودی باشد، کدام است؟
 بارم: ۱

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

اگر $f(x) = \begin{cases} x + 2; & x > 1 \\ -2x + 1; & x < 1 \end{cases}$ باشد، نمودار تابع $y = (f \circ f)(x)$ روی $(-\infty, 1)$ چگونه است؟
 بارم: ۱

تشریحی ۱۳۹۵

ساده

تابع $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ چگونه است؟
 بارم: ۱

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

وضعیت یکنوایی نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1; & x < 0 \\ 2 - x; & x \geq 0 \end{cases}$ چگونه است؟
 بارم: ۱

تشریحی ۱۳۹۸

دشوار

تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 0 \\ (x-1)^2 + 4 & x < 0 \end{cases}$ مفروض می‌باشد. به ازای چند مقدار صحیح از α معادله $f(x) = \alpha$ دارای دو جواب می‌باشد؟
 بارم: ۱

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

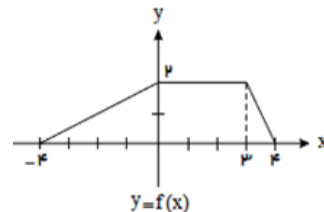
تابع $f(x) = \begin{cases} a - \log_{\frac{1}{3}} x, & x \geq 3 \\ 2x + 1, & x < 3 \end{cases}$ به ازای چه حدودی از a ، همواره در شرط $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ صدق می‌کند؟
 بارم: ۱

(۲۱)

نهایی ۱۴۰۰

متوسط

بارم: ۱

با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ نمودار، $y = \frac{1}{4}f(4x)$ را رسم کنید.

(۲۲)

تشریحی ۱۳۹۷

ساده

بارم: ۱

اگر دامنه تابع $f(x) = -x^3 + 2$ بازه $[-1, 3]$ باشد، بُرد آن به صورت $[a, b]$ می‌باشد. حاصل $b - a$ کدام است؟

(۲۳)

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۹

متوسط

بارم: ۱.۵

الف) فرض کنید f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد و a و b متعلق به این فاصله باشند، نشان دهید اگر $f(a) \leq f(b)$ ، آنگاه $a \leq b$.ب) نامعادله $\sqrt[3]{2x-5} \leq \sqrt[3]{x^2-1}$ را حل کنید.

(۲۴)

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۷

ساده

بارم: ۲

نمودار تابع $y = -x|x|$ را رسم نموده و تعیین کنید در چه بازه‌هایی نزولی است.

(۲۵)

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

بارم: ۱

بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع با ضابطه $y = |\log(-x+1)|$ در آن اکیداً نزولی است، کدام است؟

(۲۶)

تشریحی ۱۳۹۹

ساده

بارم: ۱

قسمت صعودی نمودار تابع $f(x) = |2x| - |x|$ ، نمودار تابع $g(x) = (x+3)^3$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

(۲۷)

تشریحی ۱۳۹۹

ساده

بارم: ۱

اگر نمودار تابع $y = \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ قرینه کرده، سپس ۳ واحد درجهت مثبت محور y ها انتقال دهیم و با ضریب ۲ در راستای افقی انبساط دهیم، نمودار حاصل با کدام طول خط $y = 8$ را قطع می‌کند؟

(۲۸)

تشریحی ۱۳۹۹

ساده

بارم: ۱

تابع با ضابطه $f(x) = |x^3|$ با دامنه R ، چگونه است؟

(۲۹)

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

بارم: ۱

اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x) = |x-a| - |x-b|$ در آن اکیداً نزولی است، به صورت $[-3, 5]$ باشد، دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟

(۳۰)

تشریحی ۱۳۹۹

دشوار

بارم: ۱

در بازه‌ای که تابع با ضابطه $f(x) = |x-2| + |x-3|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x) = 2x^2 - x - 10$ در چند نقطه مشترک هستند؟

(۳۱)

تشریحی ۱۳۹۶

متوسط

بارم: ۱

اگر $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 4)\}$ و $g = \{(2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$ باشد، آنگاه $(fog - gof)$ کدام است؟

(۳۲)

نهایی ۱۴۰۲

ساده

بارم: ۱

اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ و $g(x) = 3x^2 - 1$ ، دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به‌دست آورید.

(۳۳)

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

اگر $(fog)(x) = \frac{x}{x^2+1}$ و $f(x) = x+1$ باشد، ضابطه تابع $g(x)$ کدام است؟

بارم: ۱

(۳۴)

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

اگر $f(x) = [\frac{1}{x}]$ و $g(x) = |x|$ حاصل $f(g(1-\sqrt{2})) - g(f(1-\sqrt{2}))$ کدام است؟ ([] علامت جزء صحیح است.)

بارم: ۱

(۳۵)

تشریحی ۱۳۹۸

دشوار

اگر دامنه تابع $y = f(2x-1) + 3$ به صورت $[-2, 6]$ باشد، آنگاه دامنه تابع $g(x) = 3f(4x-2) - 3$ کدام است؟

بارم: ۱

(۳۶)

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

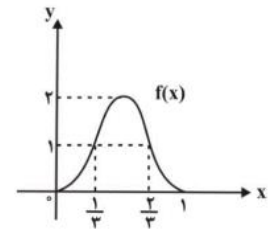
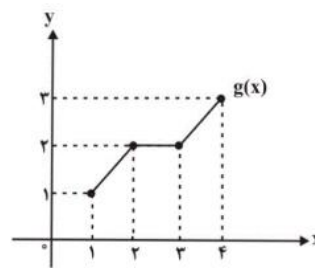
متوسط

اگر توابع f و g به شکل زیر باشند:

بارم: ۲

الف) دامنه و برد آن ها را مشخص کنید.

ب) دامنه تابع $(gof)(x)$ را به دست آورید.



(۳۷)

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

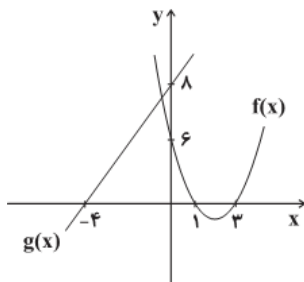
اگر تابع صعودی $f(x)$ با دامنه و برد $\mathbb{R}$ ، از مبدأ مختصات بگذرد و $f(4) = 0$ ، آنگاه کدام عدد قطعاً در دامنه $y = \sqrt{\sin x} \cdot f(2x)$ بازم: ۱ حضور دارد؟

(۳۸)

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

نمودار توابع $f(x)$ و $g(x)$ به صورت زیر می باشد. اگر f یک سهمی باشد، مجموع جواب های معادله $(fog)(x) = 0$ کدام است؟ بازم: ۱



(۳۹)

تشریحی ۱۳۹۸

دشوار

اگر $f(x) = 1-2x$ و $g(x) = ax-1$ باشند، به ازای کدام مقدار a دو تابع $g(x)$ و $g(f(x))$ روی محور x ها متقاطع اند؟ ($a \neq 0$)

بارم: ۱

(۴۰)

نهایی ۱۴۰۲

ساده

عبارت زیر را کامل کنید.

بارم: ۱

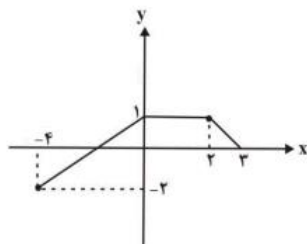
اگر برد تابع f ، بازه $[1, 2]$ باشد آنگاه برد تابع $3f(2x+1) - 1$ بازه است.

(۴۱)

با استفاده از نمودار تابع f نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.

الف) $y = 2f(x)$

ب) $y = |2f(x)|$



بارم: ۲

ساده

تشریحی قلمچی ۱۳۹۶

(۴۲)

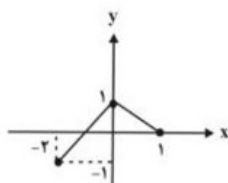
دو تابع $f = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض اند. اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد، a کدام است؟

ساده

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

(۴۳)

نمودار تابع $y=f(x)$ مطابق شکل زیر است. به کمک این نمودار، نمودار تابع $g(x) = 1 - 2|f(x)|$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را بیابید.



ساده

تشریحی ۱۳۹۸

(۴۴)

اگر خروجی ماشین زیر برابر $\frac{1}{6}$ باشد، مقدار ورودی آن کدام است؟

بارم: ۱

$$\text{(خروجی)} \rightarrow \boxed{\frac{\sqrt{4x-1}}{3x}} \rightarrow \boxed{2x-3} \rightarrow \text{(ورودی)}$$

ساده

تشریحی قلمچی ۱۳۹۸

(۴۵)

الف) اگر $f(x) = 3x + 4$ و $g(x) = x^2 - 1$ باشند، با تشکیل معادله، $(g \circ f)(x) = 0$ را حل کنید.
 ب) اگر $h(x)$ یک چندجمله ای با ضرایب مثبت و $(h \circ h)(x) = 4x + 9$ ضابطه $h(x)$ را بنویسید.

بارم: ۱.۷۵

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

(۴۶)

تابع با ضابطه $g(x) = x - \sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور x ها را در دو نقطه به طول های ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع کند، آنگاه نمودار تابع $f \circ g$ محور x ها را با کدام طول ها قطع می کند؟

ساده

نهایی ۱۴۰۲

(۴۷)

اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد،

بارم: ۱

مقدار $(g \circ f)(2)$ را تعیین کنید.

متوسط

نهایی ۱۴۰۲

(۴۸)

بارم: ۱

اگر $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + |2x|$ باشد، $f(2\sqrt{2} - 3)$ کدام است؟

ساده

تشریحی ۱۳۹۹

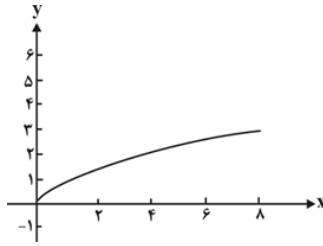
(۴۹)

بارم: ۱

دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{9|x| + x^3}{|x|}}$ کدام است؟

(۵۰)

با فرض این که نمودار $y = \sqrt{x}$ که در شکل نشان داده شده است مطلوب است رسم نمودار:



الف) $y = \sqrt{-x}$

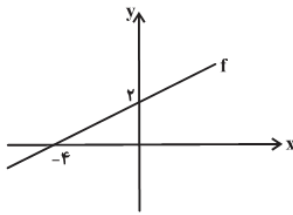
ب) $y = -3\sqrt{x}$

پ) $y = \frac{1}{3}\sqrt{x+3}$

ت) $y = -1/5\sqrt{x-1} + 2$

(۵۱)

نمودار $f(x)$ به صورت روبه رو است. حاصل $(f \circ f)(20)$ کدام است؟



(۵۲)

تابع $f(x) = 4x - 3$ ، با دامنه $[-2, 1]$ مفروض است. اگر دامنه $f \circ f$ بازه $[a, b]$ باشد، $b - a$ کدام است؟

(۵۳)

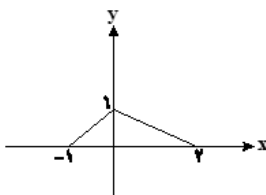
اگر $f(x) = \sqrt{x + |x+2|}$ ، دامنه تابع $f(-x)$ کدام است؟

(۵۴)

اگر $f(x) = 8x^3 - 1$ و $(f \circ g)(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ باشد، مقدار $(f + g)(-1)$ کدام است؟

(۵۵)

شکل زیر مربوط به نمودار تابع $y = f(x)$ است. مساحت محدود به نمودار تابع $y = 2f(\frac{x}{3})$ و محور x ها کدام است؟



(۵۶)

توابع $f(x) = 2$ ، $g = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ و $h(x) = x^2 - 2x + 3$ مفروض اند.

تابع $(f + g) \circ h$ را تعیین نمایید.

متوسط

تکاج ۱۳۸۴

بارم: ۱

متوسط

تشریحی ۱۳۹۶

بارم: ۱

دشوار

تشریحی ۱۳۹۴

بارم: ۱

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

بارم: ۱

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

بارم: ۱

ساده

تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱

متوسط

تشریحی قلم چی ۱۳۹۹

بارم: ۲.۷۵

(۵۷)

ساده

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۸

بارم: ۲.۲۵

تابع‌های $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = \sqrt{x^2-4}$ را در نظر بگیرید:الف) دامنه تابع gof را با استفاده از تعریف بنویسید.ب) اگر $\text{hof} = \{(-1, 2), (0, 3)\}$ ، تابع h را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

(۵۸)

متوسط

تشریحی ۱۳۹۶

بارم: ۱

اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{-x}$ باشند، برد تابع fog کدام است؟

(۵۹)

متوسط

تشریحی ۱۳۹۶

بارم: ۱

اگر $f(x) = x^2 - 3x + 2$ و $g(x) = x^2 - x + 1$ باشند، معادله $\text{fog}(x) = 0$ چند ریشه دارد؟

(۶۰)

متوسط

تشریحی ۱۳۹۴

بارم: ۱

تابع معکوس تابع $f(x) = 1 + \sqrt{1-x}$ کدام است؟

(۶۱)

متوسط

نهایی ۱۴۰۲

بارم: ۱

ضابطه وارون تابع $f(x) = x^2 - 2x + 2$ برای $x \leq 1$ به دست آورید.

(۶۲)

متوسط

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۸

بارم: ۲

اگر $g(x) = 3 + \sqrt{2x-1}$ باشد:الف) ضابطه تابع $g^{-1}(x)$ را به دست آورید.ب) برد تابع $g^{-1}(x)$ را بنویسید.

(۶۳)

متوسط

نهایی ۱۴۰۲

بارم: ۱

با محدود کردن دامنه تابع $f(x) = x^2 - 2x + 3$ یک تابع یک به یک به دست آورده و ضابطه وارون این تابع را بیابید.

(۶۴)

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

بارم: ۱

تابع $y = x|x-2|$ در یک بازه، نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه، کدام است؟

(۶۵)

ساده

نهایی ۱۴۰۲

بارم: ۱

ابتدا نمودار تابع $y - 1 = 3x^2 - 3x + 1 - x^3$ را رسم کرده، سپس ضابطه وارون آن را به دست آورید.

(۶۶)

متوسط

تشریحی ۱۳۹۴

بارم: ۱

اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \frac{5x+2}{2x-1}$ ، آنگاه حاصل $(\text{fog}^{-1})(4)$ کدام است؟

(۶۷)

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

بارم: ۱

تابع $f(x) = x^2 - 6x + 3$ را با دامنه محدودشده $D_f = (-\infty, 0)$ در نظر بگیرید. وارون این تابع کدام است؟

(۶۸)

ساده

نهایی ۱۳۹۹

بارم: ۱

ضابطه وارون تابع $g(x) = -5 - \sqrt{3x+1}$ را به دست آورید.

(۶۹)

ساده

تشریحی ۱۴۰۰

بارم: ۱

اگر $(\text{fog}^{-1})^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ و $f(x) = 3x-1$ باشد، حاصل $g(\frac{1}{3})$ کدام است؟

(۷۰)

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

بارم: ۱

اگر $g(x) = x^3 - x$ و $(\text{fog})(x) = x^2 - 2x^2 + x^2 + 1$ باشند، حاصل $f(3)$ کدام است؟

(۷۱)

تشریحی ۱۳۹۹

ساده

اگر $f^{-1} = \{(3, 1), (2, -1), (4, 3)\}$ و $g(x) = x^3 + x$ باشد، حاصل $g^{-1}(f(-1))$ کدام است؟

بارم: ۱

(۷۲)

تشریحی ۱۳۹۹

ساده

ضابطه وارون تابع $y = -\sqrt{x+4} - 3$ در کدام گزینه آمده است؟

بارم: ۱

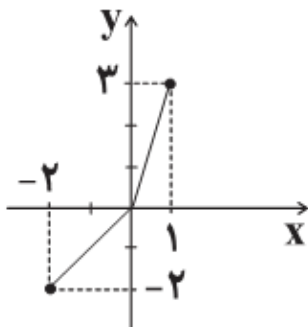
(۷۳)

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ به شکل روبه‌رو است. نمودار تابع $y = (f^{-1} \circ f)(x)$ کدام است؟

بارم: ۱



(۷۴)

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

توابع $f = \{(0, 1), (-1, 2), (1, 3), (3, 4)\}$ و $g(x) = 1 + \frac{1}{x}\sqrt{x-1}$ مفروض‌اند. اگر $(f^{-1} \circ g)(a) = f(0)$ باشد، a کدبارم: ۱ است؟

(۷۵)

تشریحی ۱۴۰۰

ساده

نمودار وارون تابع $y = (x+3)^3 + 1$ کدام است؟

بارم: ۱

(۷۶)

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

وارون تابع $f(x) = 1 - (1-x)^3$ از کدام نواحی مختصات عبور می‌کند؟

بارم: ۱

(۷۷)

تشریحی ۱۳۹۵

دشوار

نمودار تابع $y = \sqrt{1-2x}$ را یک واحد به چپ و سپس یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم. ضابطه‌ی معکوس تابع به دست آمده کدام است؟

بارم: ۱

(۷۸)

نهایی ۱۳۹۹

دشوار

ضابطه وارون تابع $f(x) = -\frac{y}{x} - 3$ را به دست آورید.

بارم: ۱

(۷۹)

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۹

متوسط

اگر $f(x) = \sqrt{x-3}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد:

بارم: ۲.۵

(الف) دامنه‌ی تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

(ب) مقدار $(f^{-1} \circ g^{-1})(7)$ را به دست آورید.

(پ) نقطه‌ی A به طول ۴ روی نمودار تابع f است. اگر خط $y = x$ عمود منصف AA' باشد، مختصات نقطه‌ی A' را بنویسید.

(۸۰)

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۶

متوسط

تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x-2}$ مفروض است.

بارم: ۱

ضابطه‌ی توابع f^{-1} و $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ را در صورت وجود بنویسید.

(۸۱)

تشریحی ۱۳۹۸

دشوار

اگر $f(x) = 1 - 2x$ و $g(x) = ax - 1$ باشند، به ازای کدام مقدار a دو تابع $g(x)$ و $g(f(x))$ روی محور x ها متقاطع اند؟ ($a \neq 0$)
بارم: ۱

(۸۲)

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

متوسط

بارم: ۲

اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 2$ و $g(x) = x^3$ باشد، آنگاه:

الف) ضابطه تابع $(f \circ g)^{-1}(x)$ را به دست آورید.

ب) حاصل $(f \circ g)^{-1}(25)$ را به دست آورید.

(۸۳)

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

بارم: ۱

اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & x > 1 \\ a, & x = 1 \\ \frac{1}{x-1}, & x < 1 \end{cases}$ یک به یک باشد، برای a چند مقدار صحیح وجود دارد؟

(۸۴)

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

متوسط

بارم: ۲

ضابطه وارون تابع $f(x) = x^2 - 4x + 1$ را با دامنه محدود شده $D_f = (-\infty, 0)$ به دست آورید.

(۸۵)

تشریحی ۱۳۹۶

دشوار

بارم: ۱

اگر $f(x) = 4 - \sqrt{x-3}$ باشد، طول نمودار رسم شده تابع $g(x) = f \circ f^{-1}(x) + f^{-1} \circ f(x)$ برابر کدام گزینه است؟

(۸۶)

تشریحی ۱۳۹۴

دشوار

بارم: ۱

تابع با ضابطه $y = x|x-2|$ ، در یک بازه، نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه، کدام است؟

(۸۷)

تشریحی ۱۳۹۵

دشوار

بارم: ۱

تابع با ضابطه $f(x) = |2x-6| - |x+1|$ ، در یک بازه، صعودی است. ضابطه معکوس آن در این بازه، کدام است؟

(۸۸)

تشریحی ۱۳۹۹

ساده

بارم: ۱

معکوس تابع $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 9x - 5}{x-1}$ به ازای $x \geq 2$ به کدام صورت است؟

(۸۹)

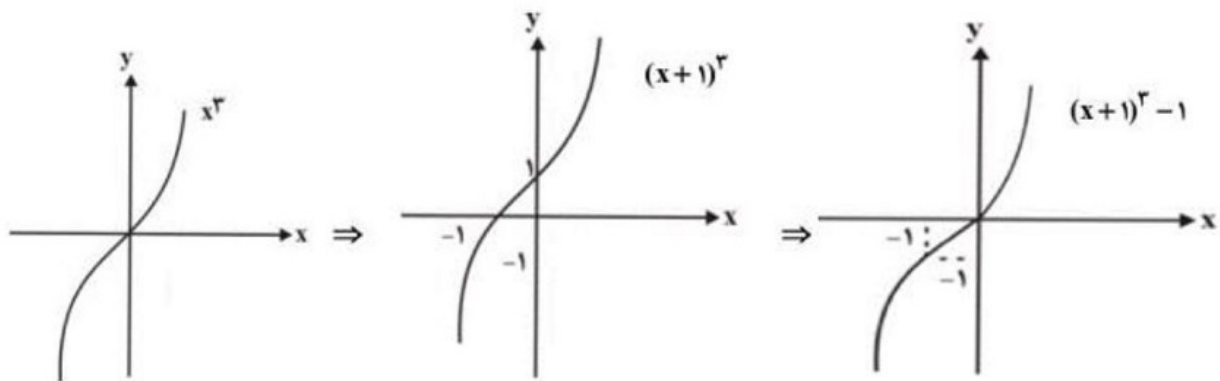
تشریحی ۱۳۹۹

ساده

بارم: ۱

اگر $f(x) = g(2x+5)$ و $g^{-1}(x) = \sqrt[5]{8x}$ باشند، آنگاه حاصل $f^{-1}(4)$ کدام است؟

$$y = x^r + r x^{r-1} + r x + 1 - 1 \Rightarrow y = (x+1)^r - 1$$



متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۲

f اکیداً صعودی و $y = 3 - x$ اکیداً نزولی است، پس ترکیب آن‌ها یعنی $f(3 - x)$ نیز اکیداً نزولی است. چون $f(1) = 0$ است، $x = 1$ صفر تابع $f(x)$ و $x = 2$ صفر تابع $f(3 - x)$ است.

حال برای به دست آوردن دامنه تابع g کافی است جدول تعیین علامتی را تشکیل دهیم. باید داشته باشیم $\frac{x-4}{f(3-x)} \geq 0$.

x		۲		۴	
$x - 4$	-	-	-	۰	+
$f(3 - x)$	+	۰	-	-	-
$\frac{x - 4}{f(3 - x)}$	-	تن	+	۰	-

$$\Rightarrow D_g = (2, 4]$$

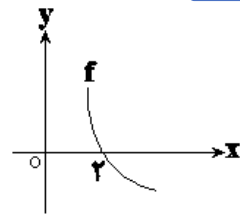
این بازه شامل اعداد صحیح ۳ و ۴ است.

متوسط

تشریحی ۱۴۰۰

گزینه درست: null

سوال ۳



می‌دانیم $f(2) = 0$ بوده و تابع f اکیداً نزولی است.

$$\frac{x^2}{(x-1)f(x)} \geq 0$$

x		0		1		2	
x^2	+	0	+		+		+
$x - 1$	-		-	0	+		+
$f(x)$	+	+		+		0	-
جارت	-	0	-	تن	+	تن	-

دامنه تعریف تابع $D_g = \{0\} \cup (1, 2)$ است و شامل یک عدد صحیح نامنفی است.

متوسط

نهایی ۱۴۰۲

گزینه درست: null

سوال ۴

$$\frac{9x^2 - x^2 - 6x - 9}{2x - 3} - \frac{2}{x} = 1 \Rightarrow \frac{(2x - 3)(4x + 3)}{2x - 3} - \frac{2}{x} = 1$$

$$\xrightarrow{\times(x)} 4x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{1+8}}{|2|} = \frac{3}{2}$$

ساده

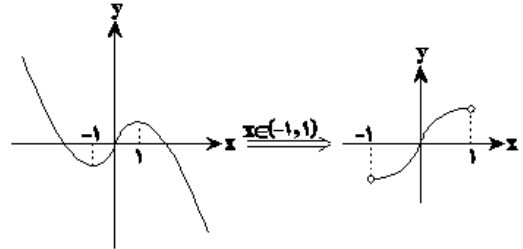
تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۵

با تعیین علامت $|x|$ ، داریم:

$$f(x) = 2x - x|x| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & x \geq 0 \\ x^2 + 2x & x < 0 \end{cases}$$

حال تابع $f(x)$ را در بازه داده شده، رسم می‌کنیم:بنابراین تابع در بازه $(-1, 1)$ ، صعودی است.

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۶

ابتدا $f(-\frac{3}{4}) + f(\frac{3}{4})$ را حساب کرده، سپس $f(2)$ را کم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{4}\right) + f\left(-\frac{3}{4}\right) &= \left(-\left(\frac{3}{4}\right)^2 + a\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} + 2\right) \\ &\quad + \left(-\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + a\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{3}{4} + 2\right) \\ &= 2a\left(\frac{9}{16}\right) + 4 = \frac{9}{8}a + 4 \end{aligned}$$

$$f(2) = -8 + 4a + 2 + 2 = 4a - 4 \quad \text{حال:}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{4}\right) + f\left(-\frac{3}{4}\right) - f(2) &= \left(\frac{9}{8}a + 4\right) - (4a - 4) = \frac{a}{8} + 8 = 5 \\ \Rightarrow a &= -6 \end{aligned}$$

پس:

$$f(x) = -x^3 + (-6x^2) + x + 2$$

$$\Rightarrow f(1) + f(2) = (-1 - 6 + 1 + 2) + (-8 - 24 + 2 + 2) = -32$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۷

تابع $(f+g)(x)$ با دامنه $\{m, 1, 4\}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(f+g)(x) = \{(m, 1 + \sqrt{m}), (1, m+1), (4, 6)\}$$

اگر $0 < m < 1$ باشد، باید $1 + \sqrt{m} \leq m + 1$ یعنی $\sqrt{m} \leq m$ باشد، که این معادله در بازه $(0, 1)$ جواب ندارد.اگر $m > 1$ باشد، باید $1 + \sqrt{m} \geq 1 + m$ باشد که امکان پذیر نیست.با در نظر گرفتن $m = 0$ داریم: $(f+g)(x) = \{(0, 1), (1, 1), (4, 6)\}$ و اگر $m = 1$ باشد: $(f+g)(x) = \{(1, 2), (4, 6)\}$

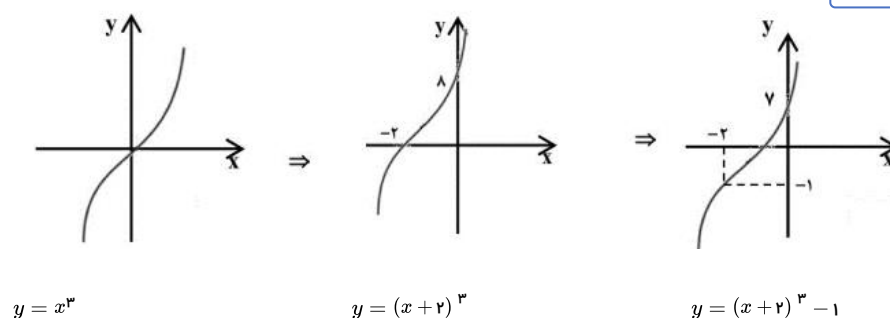
که هر دو تابع صعودی هستند.

سوال ۸

گزینه درست: null

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

ساده



سوال ۹

گزینه درست: null

نهایی ۱۳۹۹

دشوار

الف) پایین

ب) ۴۰

سوال ۱۰

گزینه درست: null

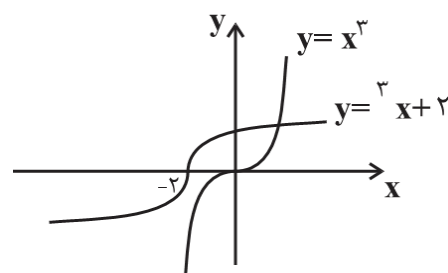
تشریحی ۱۳۹۹

ساده

گزینه «۱»

نمودار توابع $y = x^3$ و $y = \sqrt[3]{x+2}$ به صورت روبه‌رو است.

دو نمودار در یک نقطه متقاطع هستند پس معادله یک جواب حقیقی دارد.



سوال ۱۱

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

طبق تعریف تابع اکیداً نزولی داریم:

$$f(3a-1) < f(a+1) \Rightarrow 3a-1 > a+1 \Rightarrow a > 1$$

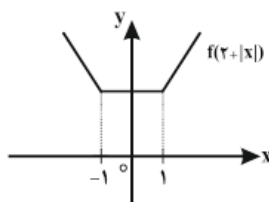
سوال ۱۲

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

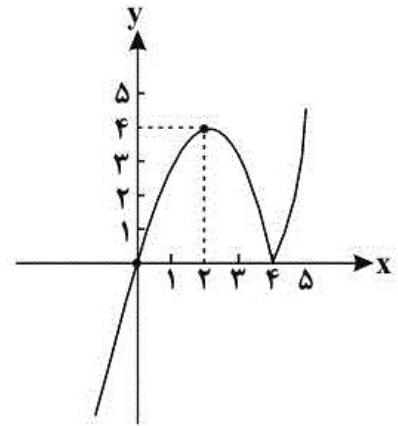
نمودار تابع $f(x)$ را دو واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x+2)$ به دست آید. سپس به جای مقادیر تابع در x های منفی نمودار، قرینه آن به ازای x های مثبت را نسبت به محور y ها قرار می‌دهیم تا نمودار $f(2+|x|)$ مطابق شکل زیر به دست آید:



مشاهده می‌شود که بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(2+|x|)$ در آن صعودی است، بازه $[-1, +\infty)$ خواهد بود.

ابتدا قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم و تابع را رسم می‌کنیم:

$$y = x|x-4| = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 4 \\ -x^2 + 4x & x < 4 \end{cases}$$



تابع در بازه $[2, 4]$ و هر زیرمجموعه‌ای از آن نزولی است، بنابراین $\text{Max}(b-a) = 4-2=2$.

$$T = 4\pi \max = 3\pi \min = -1|a| = 2$$

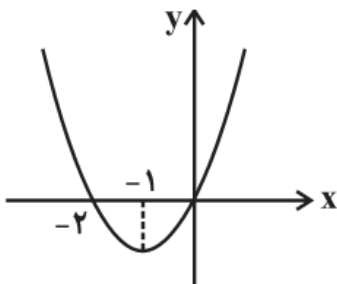
$$y = 2 \sin\left(-\frac{1}{2}x\right) + 1$$

$$y = -2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$$

گزینه «۱»

نمودار تابع $x^2 + 2x$ به صورت زیر رسم می‌کنیم:

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، اگر تابع ۱ واحد به سمت راست بیاید، همچنان در بازه $[0, +\infty)$ صعودی است اما بیشتر از ۱ واحد به سمت راست آمدن آن باعث نزولی شدن آن در قسمتی از این بازه می‌شود. بنابراین حداکثر مقدار a برابر ۱ است.



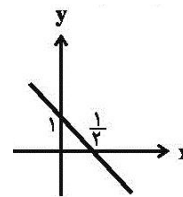
سوال ۱۶

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

اگر $x < 1$ باشد، برای تعیین ضابطه $y = f(f(x)) = f(-2x + 1)$ ابتدا نمودار $y = -2x + 1$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، اگر $x > 0$ باشد، $-2x + 1 < 1$ و اگر $x < 0$ باشد، $-2x + 1 > 1$ است. بنابراین:

$$y = f(-2x + 1) = \begin{cases} -2(-2x + 1) + 1; & 0 < x < 1 \\ (-2x + 1) + 2; & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} 4x - 1; & 0 < x < 1 \\ -2x + 3; & x < 0 \end{cases}$$

می‌دانیم نمودار $y = 4x - 1$ اکیداً صعودی و نمودار تابع $y = -2x + 3$ اکیداً نزولی است. پس نمودار f روی $(-\infty, 1)$ غیریکنوا است.

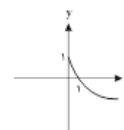
سوال ۱۷

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۵

ساده

نمودار تابع f به صورت مقابل است:



با توجه به شکل، تابع f یک‌به‌یک است (چون هر خط موازی محور x ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند). از طرفی تابع f نزولی است.

سوال ۱۸

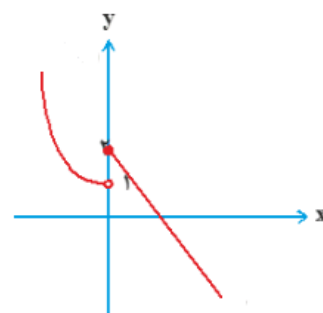
گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

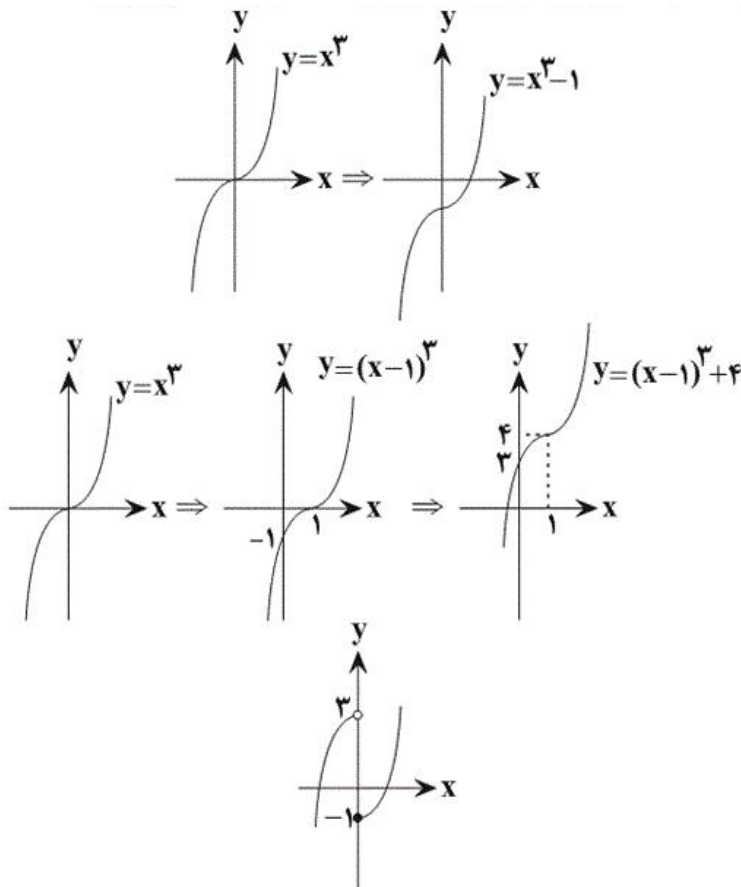
$$y = x^2 + 1$$



$$y = -x$$

واضح است که نمودار تابع f ، غیر یکنواست.

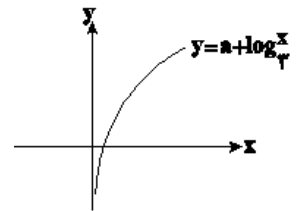
ابتدا باید نمودار تابع $f(x)$ را رسم کنیم. برای این کار ابتدا نمودار $y = x^3 - 1$ و $y = (x-1)^3 + 4$ را رسم می‌کنیم و بازه مد نظر را نگه می‌داریم.



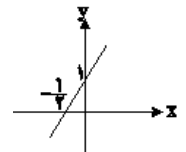
با توجه به نمودار تابع $f(x)$ واضح است که اگر $\alpha \in [-1, 3]$ باشد، آن‌گاه معادله $f(x) = \alpha$ دو جواب دارد. پس خط $y = \alpha$ به‌ازای $\alpha = \{-1, 0, 1, 2\}$ در دو نقطه با نمودار تابع $f(x)$ برخورد می‌کند. پس ۴ مقدار صحیح برای α وجود دارد.

ابتدا شکل کلی از نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} a - \log_{\frac{x}{3}}, & x \geq 3 \\ 2x + 1, & x < 3 \end{cases}$ را رسم می‌کنیم:

$$y = a - \log_{\frac{x}{3}} = a - \log_{\frac{x}{3}} = a + \log_{\frac{3}{x}}$$

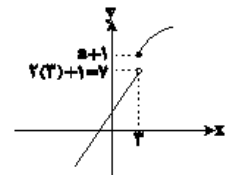


$$y = 2x + 1$$



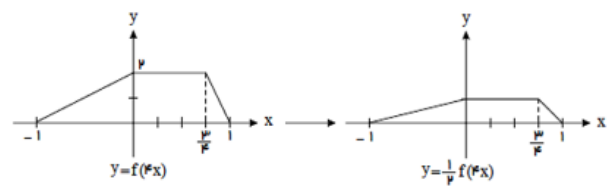
حال هر دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

شرط $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ به معنی صعودی بودن $f(x)$ است، برای صعودی بودن باید داشته باشیم:

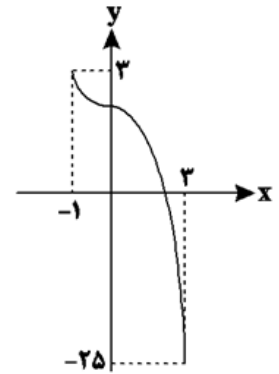


$$5 \leq a + 1 \Rightarrow 4 \leq a$$

کافی است طول نقاط را $\frac{1}{p}$ برابر کرده و سپس عرض نقاط را نصف کنیم.



راه حل اول: با رسم تابع $f(x)$ و تعیین نقاط ابتدایی و انتهایی بُرد تابع مشخص می‌شود:



$$D_f = \left[\begin{matrix} -25 \\ a \end{matrix}, \begin{matrix} 3 \\ b \end{matrix} \right] \Rightarrow b - a = 3 - (-25) = 28$$

راه حل دوم: در توابع اکیداً نزولی، اگر دامنه $[m, n]$ باشد، بُرد $[f(n), f(m)]$ است.

$$D_f = [-1, 3] \Rightarrow R_f = \left[\underbrace{f(3)}_{-25}, \underbrace{f(-1)}_3 \right] = [-25, 3]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -25 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow b - a = 3 - (-25) = 28$$

الف) برهان خلف:

فرض می‌کنیم $a \leq b$ نباشد پس باید $a > b$ باشد و چون f اکیداً صعودی است، پس بنابر تعریف باید $f(a) > f(b)$ باشد که متناقض با شرط داده شده است پس انتخاب نابه جای $a > b$ نادرست است و یعنی $a \leq b$ درست است.

ب) می‌دانیم تابع $y = \sqrt[3]{x}$ برای هر عدد حقیقی اکیداً صعودی است پس با توجه به قسمت الف اگر $\sqrt[3]{2x-5} \leq \sqrt[3]{x^2-1}$ باشد باید:

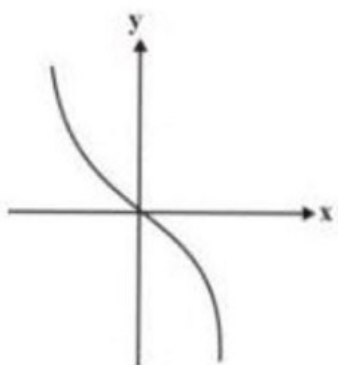
$$2x - 5 \leq x^2 - 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 4 \geq 0 \rightarrow (x-1)^2 + 3 \geq 0 \rightarrow x \in R \text{ می‌تواند هر عدد حقیقی باشد} \rightarrow \text{که همواره برقرار است}$$

یعنی همه اعداد حقیقی جواب نامعادله است.

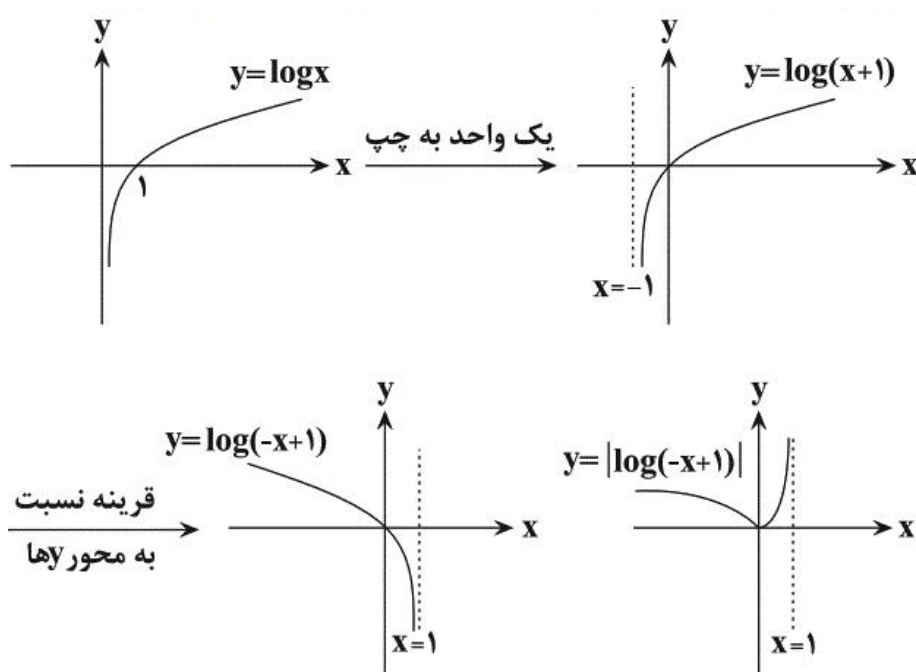
[عدم تشخیص استفاده از برهان خلف - عدم برقراری ارتباط بین الف و ب - عدم تشخیص صعودی بودن تابع $y = \sqrt[3]{x}$]

$$y = -x|x| = \begin{cases} -x^2 & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$$



با توجه به نمودار تابع، روشن است که در تمام دامنه خود یعنی R ، نزولی است.

نمودار تابع $y = |\log(-x+1)|$ را مرحله به مرحله رسم می‌کنیم:



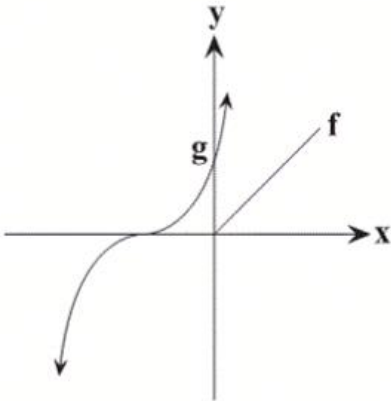
با توجه به شکل نمودار تابع در فاصله $(-\infty, 1]$ اکیداً نزولی است.

ابتدا ضابطه $f(x)$ را با استفاده از ضابطه‌بندی ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

که در $x \geq 0$ صعودی است.

حال نمودارهای $f(x)$ (در قسمت صعودی) و $g(x)$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



دو نمودار f و g هیچ نقطه برخوردی با هم ندارند.

قرینه نسبت به $y = x$ یعنی همان وارون کردن:

$$y = \sqrt{x-1}; y \geq 0 \Rightarrow y^2 = x-1 \Rightarrow y^2 + 1 = x$$

جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \Rightarrow y = x^2 + 1 & \xrightarrow{\text{واحد به بالا}} y = x^2 + 4; x \geq 0 \\ & \xrightarrow{\text{انقباض افقی}} y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 4 \end{aligned}$$

$$y = 8 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + 4 = 8 \Rightarrow x^2 = 16$$

$$\Rightarrow x = \pm 4 \xrightarrow{x \geq 0} x = 4$$

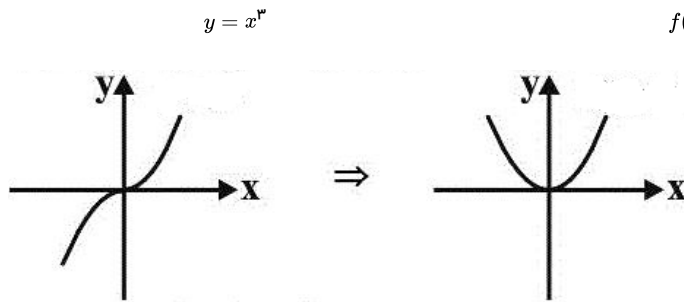
ساده

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۲۸

نمودار تابع $f(x) = |x^3|$ را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، تابع غیر یک‌به‌یک و درنتیجه وارون‌ناپذیر است.

متوسط

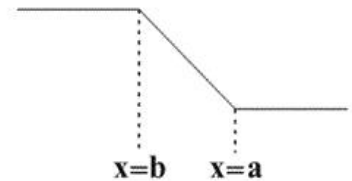
تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

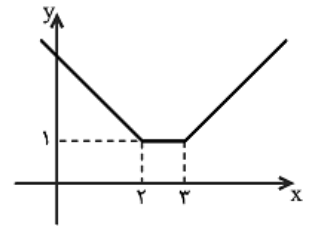
سوال ۲۹

چون تابع به صورت آبخاری یا سرسره‌ای است و قرار است نزولی باشد، پس باید $a > b$ باشد، این توابع بین ریشه‌های عبارت داخل قدرمطلق اکیداً یکنوا هستند پس ۵ و -۳ همان ریشه‌ها هستند:

$$\left. \begin{array}{l} a = 5 \\ b = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow (a, b) = (5, -3)$$



نمودار تابع $f(x) = |x-2| + |x-3|$ به صورت زیر است.



ملاحظه می‌شود که این تابع به ازای $x < 2$ اکیداً نزولی است که در این صورت عبارتهای داخل هر دو قدر مطلق منفی هستند.

بنابراین:

$$x < 2 : f(x) = -(x-2) - (x-3) = -2x + 5$$

حال باید بررسی کنیم معادله‌ی $\underbrace{2x^2 - x - 10}_{g(x)} = \underbrace{-2x + 5}_{f(x); x < 2}$ چند جواب در $x < 2$ دارد.

$$2x^2 + x - 15 = 0 \Rightarrow (2x - 5)(x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} > 2 & \times \\ x = -3 < 2 & \checkmark \end{cases}$$

$$g = \{(2, 3), (3, 5), (4, 7)\}, f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 4)\}$$

$$fog = \{(2, 4)\}, \quad gof = \{(1, 3), (2, 7), (3, 7)\}$$

$$\Rightarrow (fog - gof) = \{(2, -3)\}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 - 1 \in [2, +\infty)\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 - 1 \geq 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$$

$$= (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$f(g(x)) = g(x) + 1$ یعنی در تابع f به جای x عبارت $g(x)$ را قرار دهیم. چون $f(x) = x + 1$ است، پس داریم:

$$\underbrace{(fog)(x)}_{f(g(x))} = \frac{x}{x^2 + 1} \Rightarrow g(x) + 1 = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$g(x) = \frac{x}{x^2 + 1} - 1 \Rightarrow g(x) = \frac{x - x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۳۴

هریک از عبارتها را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$f(g(1-\sqrt{2})) = f(|1-\sqrt{2}|) = f(\sqrt{2}-1) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right]$$

از آنجا که با گویا کردن مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$$

$$f(g(1-\sqrt{2})) = [\sqrt{2}+1] = 2 \quad \text{پس:}$$

$$g(f(1-\sqrt{2})) = g\left(\left[\frac{1}{1-\sqrt{2}}\right]\right)$$

$$\frac{1}{1-\sqrt{2}} \quad \text{برابر } -(\sqrt{2}+1) \text{ است، پس:}$$

$$g\left(\left[\frac{1}{1-\sqrt{2}}\right]\right) = g([-(\sqrt{2}+1)]) = g(-3) = |-3| = 3$$

$$f(g(1-\sqrt{2})) - g(f(1-\sqrt{2})) = 2 - 3 = -1 \quad \text{در نتیجه:}$$

دشوار

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۳۵

ابتدا دامنه $f(x)$ را به دست آورده و سپس از روی آن دامنه $g(x) = 3f(4x-2) - 3$ را به دست می‌آوریم:

$$-2 \leq x \leq 6 \Rightarrow -4 \leq 2x \leq 12 \Rightarrow -5 \leq 2x-1 \leq 11$$

پس دامنه $f(x)$ به صورت $[-5, 11]$ می‌باشد. برای به دست آوردن دامنه g داریم:

$$-5 \leq 4x-2 \leq 11 \Rightarrow -3 \leq 4x \leq 13 \Rightarrow -\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{13}{4}$$

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۳۶

الف) با توجه به نمودارهای توابع داریم:

$$\begin{aligned} D_f &= [0, 1] & R_f &= [0, 2] \\ D_g &= [1, 4] & R_g &= [1, 3] \end{aligned}$$

ب)

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$\Rightarrow D_{g \circ f} = \{0 \leq x \leq 1 \mid 1 \leq f(x) \leq 4\} \Rightarrow D_{g \circ f} = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۳۷

تابع صعودی $f(x)$ دارای دامنه و برد $\mathbb{R}$ است و محور x ها را طبق فرض سؤال در دو نقطه $x=0$ و $x=4$ قطع کرده است. پس می‌توان نتیجه گرفت حتماً بین $x=0$ و $x=4$ ثابت است، چرا که امکان ندارد بعد از نقطه $x=0$ صعود کند و دوباره برگردد تا محور x را در $x=4$ قطع کند، اما در مورد بعد $x=4$ و قبل $x=0$ نمی‌توان نظری داد.

پس تابع $f(2x)$ بین $x=0$ و $x=2$ ثابت است و $f(2x)$ در بازه $[0, 2]$ قطعاً صفر می‌شود، پس $x=1$ قطعاً تابع y را صفر می‌کند و در دامنه $y = \sqrt{\sin x \cdot f(2x)}$ حضور دارد.

روش اول: تابع $f(x)$ در $x=1$ و $x=3$ برابر صفر می‌شود، یعنی:

$$f(1) = f(3) = 0$$

بنابراین برای آن که تابع $(fog)(x) = f(g(x))$ برابر صفر شود باید $g(x)$ برابر ۱ یا ۳ شود:

$$(fog)(x) = f(\underbrace{g(x)}_{1 \text{ یا } 3}) = 0$$

ضابطه تابع $g(x)$ را می‌نویسیم. تابع $g(x)$ خطی است و معادله آن را به صورت $g(x) = ax + b$ در نظر می‌گیریم.

$$g(x) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} g(0) = a \times 0 + b = 8 \Rightarrow b = 8 \\ g(-4) = a \times (-4) + b = 0 \Rightarrow -4a + 8 = 0 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = 2x + 8$$

برای حل معادله $(fog)(x) = 0$ باید $g(x)$ برابر ۱ یا ۳ باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} g(x) = 1 \Rightarrow 2x + 8 = 1 \Rightarrow x_1 = -\frac{7}{2} \\ g(x) = 3 \Rightarrow 2x + 8 = 3 \Rightarrow x_2 = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{7}{2} - \frac{5}{2} = -6$$

روش دوم: می‌توانیم معادله تابع درجه دوم $f(x)$ و تابع خطی $g(x)$ را بنویسیم سپس $fog(x)$ را تشکیل دهیم و برابر صفر قرار دهیم و بعد معادله حاصل را حل کنیم.

ابتدا ضابطه gof را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = a(1-2x) - 1 = a - 2ax - 1$$

اکنون چون gof و go روی محور x متقاطع‌اند، پس طول نقطه تقاطع برابر با ریشه g و ریشه gof است.

$$\Rightarrow \begin{cases} g(f(x)) = 0 \Rightarrow a - 2ax - 1 = 0 \Rightarrow a - 1 = 2ax \Rightarrow \frac{a-1}{2a} = x \\ g(x) = 0 \Rightarrow ax - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{a} \end{cases}$$

چون ریشه gof و go یکسان است، پس داریم:

$$\frac{a-1}{2a} = \frac{1}{a} \xrightarrow{a \neq 0} \frac{a-1}{2} = 1 \Rightarrow a-1=2 \Rightarrow a=3$$

برد تابع $f = \left[2, 5 \right]$

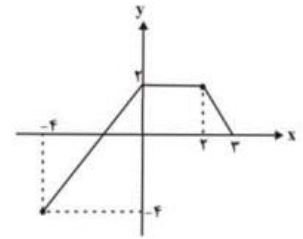
ساده

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۷

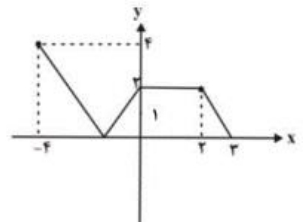
گزینه درست: null

سوال ۴۱

(الف)



(ب)



ساده

تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۴۲

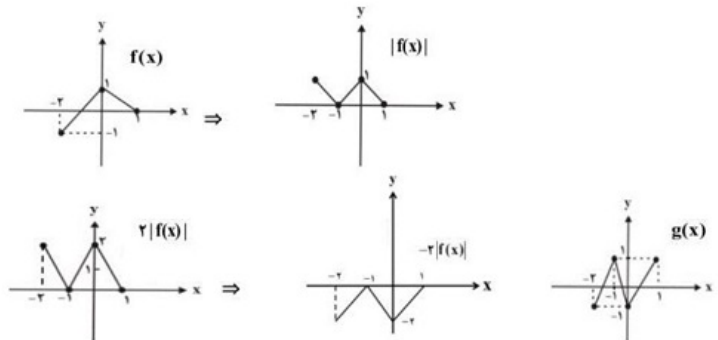
$$\begin{aligned}
 (6, 3) \in f &\Rightarrow (3, 6) \in f^{-1} \Rightarrow f^{-1}(3) = 6 \\
 &\xrightarrow{f^{-1}(g(2a))=6} g(2a) = 3 \\
 \Rightarrow \frac{2a}{2a-1} = 3 &\Rightarrow 2a = 6a - 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

ساده

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۴۳



$$\Rightarrow D_g = [-2, 1], \quad R_g = [-1, 1]$$

ساده

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۴۴

طبق صورت سؤال خروجی ماشین برابر $\frac{1}{6}$ است، پس:

$$\frac{\sqrt{2x}-1}{3x} = \frac{1}{6} \Rightarrow 2\sqrt{2x}-2 = x$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2x} = x+2 \xrightarrow{\text{توان دو}} 8x = x^2 + 4x + 4$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

یعنی ورودی ضابطه دوم باید ۲ باشد. بنابراین خروجی ضابطه اول نیز ۲ می‌باشد:

$$2x-3=2 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

پس ورودی ماشین، $\frac{5}{2}$ است.

ساده

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۴۵

(الف)

$$(gof)(x) = g(3x+4) = (3x+4)^2 - 1 = 9x^2 + 24x + 15$$

$$9x^2 + 24x + 15 = 0 \rightarrow 3(3x^2 + 8x + 5) = 0 \rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64-60}}{6} \rightarrow$$

$$x = -1 \text{ یا } x = -\frac{5}{3}$$

(ب)

$$h(x) = ax + b \rightarrow (hoh)(x) = a^2x + ab + b = 4x + 9 \rightarrow a = 2, b = 3 \rightarrow h(x) = 2x + 3$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۴۶

برای یافتن نقاط تقاطع تابع fog با محور xها باید معادله $(fog)(x) = 0$ را حل کنیم، یعنی: $f(g(x)) = 0$

برای حل این معادله هم ابتدا ریشه‌های f را می‌یابیم. چون f در دو نقطه به طول‌های ۶ و $\frac{-1}{۴}$ محور xها را قطع می‌کند، پس:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 6, x = \frac{-1}{4}$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = 0 \Rightarrow g(x) = 6, g(x) = \frac{-1}{4}$$

از آنجا که $g(x) = x - \sqrt{x}$ ، بنابراین:

$$x - \sqrt{x} = 6 \text{ و } x - \sqrt{x} = \frac{-1}{4}$$

ساده

نهایی ۱۴۰۲

گزینه درست: null

سوال ۴۷

$$(gof)(2) = 1$$

می دانیم $\sqrt{2}$ تقریباً برابر با $1/4$ است بنابراین $2\sqrt{2} \simeq 2/8$ می شود و عدد $2\sqrt{2} - 3$ یک عدد منفی خواهد بود و اعداد منفی هنگام بیرون آمدن از قدرمطلق یک منفی در آن ها ضرب می شود. با جای گذاری عدد $2\sqrt{2} - 3$ در تابع مسئله داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{3}x^2 + |2x| \xrightarrow{x=2\sqrt{2}-3} f(2\sqrt{2}-3) = -\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-3)^2 + |2(2\sqrt{2}-3)| \\ &= -\frac{1}{3}\left((2\sqrt{2})^2 - 2(2\sqrt{2})(3) + (3)^2\right) - 2(2\sqrt{2}-3) = -\frac{1}{3}(8 - 12\sqrt{2} + 9) - 4\sqrt{2} + 6 \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{12\sqrt{2}}{3} - \frac{9}{3} - 4\sqrt{2} + 6 = -\frac{1}{3} + 4\sqrt{2} - 3 - 4\sqrt{2} + 6 = -\frac{1}{3} + 2 = \frac{-1+6}{3} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{9|x| + x^3}{|x|}} \Rightarrow f(x) = \sqrt{9 + \frac{x^3}{|x|}} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 9} & x > 0 \\ \sqrt{9 - x^2} & x < 0 \end{cases}$$

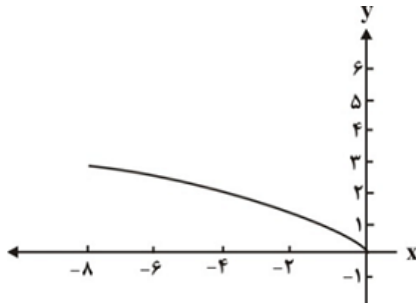
حال دامنه تابع را می یابیم، برای $x > 0$ که دامنه تمامی اعداد را شامل می شود. برای $x < 0$ داریم:

$$\sqrt{9 - x^2} \Rightarrow 9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

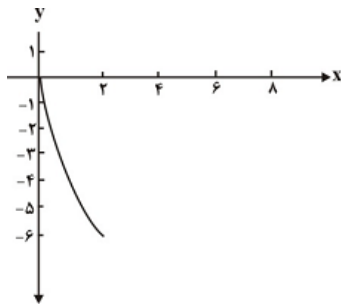
$$\xrightarrow{x < 0} -3 \leq x < 0 \Rightarrow [-3, 0)$$

$$D_f : [-3, 0) \cup (0, +\infty)$$

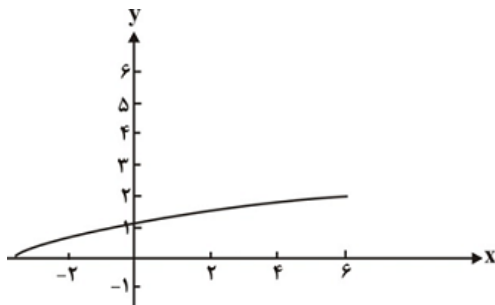
الف) نمودار $y = \sqrt{-x}$ مشابه نمودار $y = \sqrt{x}$ است که نسبت به محور y ها بازتابیده شده است.



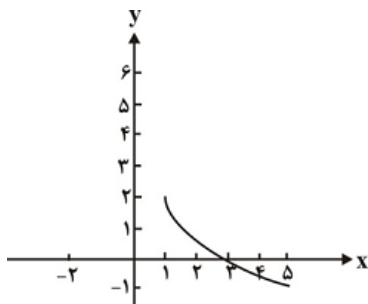
ب) نمودار $y = -3\sqrt{x}$ مشابه نمودار $y = \sqrt{x}$ است که با ضریب ۳ در جهت محور y ها منبسط و نسبت به محور x ها بازتابیده شده است.



پ) نمودار $y = \frac{1}{4}\sqrt{x+3}$ مشابه نمودار $y = \sqrt{x}$ است که ۳ واحد به سمت چپ منتقل و با ضریب ۲ در جهت محور y ها منقبض شده است.



ت) نمودار $y = -\frac{1}{5}\sqrt{x-1} + 2$ مشابه نمودار $y = \sqrt{x}$ است که ۱ واحد به سمت راست منتقل و با ضریب ۱/۵ منبسط و نسبت به محور x ها بازتابیده شده و ۲ واحد به بالا منتقل شده است.



سوال ۵۱

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۶

متوسط

با توجه به نمودار f ، تابع f از نقاط $A(0, 2)$ و $B(-4, 0)$ می‌گذرد.

$$m_{AB} = \frac{2-0}{0+4} = \frac{1}{2} \Rightarrow y-2 = \frac{1}{2}(x-0) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

$$f(f(x)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x + 2\right) + 2 = \frac{1}{4}x + 3$$

$$\Rightarrow (f \circ f)(20) = f(f(20)) = \frac{1}{4} \times 20 + 3 = 8$$

سوال ۵۲

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۴

دشواری

از تعریف دامنه‌ی ترکیب توابع استفاده می‌کنیم:

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f, f(x) \in D_f\} \quad (*)$$

تابع $f(x) = 4x - 3$ با دامنه‌ی $[-2, 1]$ داده شده است، بنابراین:

$$\xrightarrow{*} D_{f \circ f} = \{x \in [-2, 1], -2 \leq 4x - 3 \leq 1\}$$

$$= \{x \in [-2, 1], 1 \leq 4x \leq 4\}$$

$$= \{x \in [-2, 1], \frac{1}{4} \leq x \leq 1\}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ f} = [\frac{1}{4}, 1]$$

$$\Rightarrow b - a = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

سوال ۵۳

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

$$f(x) = \sqrt{x + |x + 2|}$$

تابع $f(-x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(-x) = \sqrt{-x + |-x + 2|} = \sqrt{|x - 2| - x}$$

باید زیر رادیکال نامنفی باشد، لذا:

$$|x - 2| - x \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 2: x - 2 - x \geq 0 \Rightarrow -2 \geq 0 \\ x < 2: -x + 2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

بنابراین، دامنه تابع $f(-x)$ ، $x \leq 1$ است.

سوال ۵۴

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

$$f(x) = 8x^3 - 1 \Rightarrow f(g(x)) = 8g^3(x) - 1$$

$g(-1)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(g(-1)) = -1 \Rightarrow 8(g(-1))^3 - 1 = -1 \Rightarrow g(-1) = 0$$

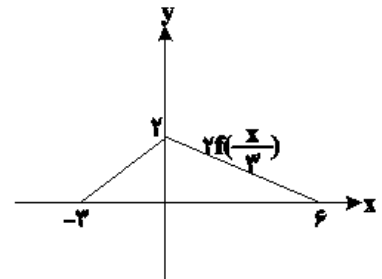
مقدار $f + g$ را در $x = -1$ حساب می‌کنیم:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\Rightarrow (f + g)(-1) = f(-1) + g(-1) = (-8 - 1) + 0 = -9$$

برای رسم نمودار تابع $y = 2f(\frac{x}{3})$ ، مقادیر تابع $f(x)$ را در راستای محور y ها ۲ برابر و در راستای محور x ها ۳ برابر می‌کنیم. بنابراین:

$$S = \frac{2 \times 9}{2} = 9$$



دامنه تابع f ، R است ولی دامنه تابع g مجموعه $\{0, 1, 2\}$ است. پس باید تابع $f+g$ را در دامنه $\{0, 1, 2\}$ محاسبه کنیم.

$$f+g = \{(0, 1+2), (1, 2+2), (2, 3+2)\}$$

$$\Rightarrow (f+g) = \{(0, 3), (1, 4), (2, 5)\}$$

برای ترکیب تابع $f+g$ با تابع h باید $h(x) \in D_{f+g}$ باشد. بنابراین $h(x)$ را در مجموعه $\{0, 1, 2\}$ بررسی می‌کنیم:

$$I) h(x) = x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \quad \text{ریشه ندارد}$$

$$II) h(x) = x^2 - 2x + 3 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \quad \text{ریشه ندارد}$$

$$III) h(x) = x^2 - 2x + 3 = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

در نتیجه:

$$(f+g)oh = (f+g)(h(x)) = (f+g)(2) = 5 \xrightarrow{x=1} (f+g)oh = \{(1, 5)\}$$

(الف)

$$D_g = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \{x \geq -1 : \sqrt{x+1} \geq 2 \quad \text{یا} \quad \sqrt{x+1} \leq -2\}$$

$$= \{x \geq -1 : x \geq 3\} = [3, +\infty)$$

(ب)

$$f(-1) = 0, h(f(-1)) = h(0) = 2$$

$$f(0) = 1, h(f(0)) = h(1) = 3$$

$$\rightarrow h = \{(0, 2), (1, 3)\}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow D_f = \{x|x \geq 0\}$$

$$g(x) = \sqrt{-x} \xrightarrow[x \leq 0]{-x \geq 0} D_g = \{x|x \leq 0\}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \leq 0 | \sqrt{-x} \geq 0\}$$

$$= \{x \leq 0 | -x \geq 0\} = \{x \leq 0 | x \leq 0\} = \{x|x \leq 0\}$$

یعنی دامنه تابع fog برابر بازه $[-\infty, 0]$ است. حال برای یافتن برد تابع fog، آن را تشکیل می‌دهیم:

$$fog(x) = f(g(x)) = \sqrt{\sqrt{-x}} = \sqrt[4]{-x}, \quad D_{fog} = \{x|x \leq 0\}$$

با یک عددگذاری ساده مشخص است که برد تابع fog بازه $[0, +\infty)$ است.

$$fog(x) = f(g(x)) = 0 \Rightarrow (g(x))^2 - 3(g(x)) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (g(x) - 2)(g(x) - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(x) = 2 \\ g(x) = 1 \end{cases}$$

$$g(x) = 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0 \quad \text{یا} \quad x = 1$$

$$g(x) = 2 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 2 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{یا} \quad x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

بنابراین معادله $fog(x) = 0$ دارای چهار ریشه است.

دامنه‌ی تابع f ، $x \leq 1$ است. با این فرض تابع معکوس f را می‌یابیم:

$$y = 1 + \sqrt{1-x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x} = y-1 \Rightarrow 1-x = (y-1)^2$$

$$\Rightarrow x = 1 - (y-1)^2 \Rightarrow x = 1 - (y^2 - 2y + 1)$$

$$\Rightarrow x = 2y - y^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2x - x^2$$

حال باید دامنه‌ی تابع f^{-1} که همان برد تابع f است را محاسبه کنیم:

$$\sqrt{1-x} \geq 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{1-x} \geq 1$$

$$f \text{ برد } = D_{f^{-1}} = [1, +\infty)$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x-1)^2 + 1 \rightarrow (x-1)^2 + 1 = y \rightarrow$$

$$(x-1)^2 = y-1 \xrightarrow[\text{منفی}]{\text{جذر}} \left| \underbrace{x-1}_{\text{منفی}} \right| = \sqrt{y-1} \xrightarrow{x \leq 1} -x+1 = \sqrt{y-1}$$

$$\rightarrow x = 1 - \sqrt{y-1} \xrightarrow[\text{عوض}]{\text{جای } y, x} y = f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x-1}$$

(الف)

$$y = 3 + \sqrt{2x-1} \rightarrow x = 3 + \sqrt{2y-1}$$

$$\rightarrow \sqrt{2y-1} = x-3 \rightarrow 2y-1 = (x-3)^2$$

$$\rightarrow y = \frac{(x-3)^2 + 1}{2} \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{(x-3)^2 + 1}{2}$$

(ب)

$$R_{g^{-1}} = D_g$$

$$D_g : 2x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{1}{2} \rightarrow R_{g^{-1}} = D_g = \left[\frac{1}{2}, +\infty \right)$$

(اگر دانش‌آموز با کمک $D_{g^{-1}}$ به $R_{g^{-1}}$ برسد نیز صحیح است و نمره داده شود.)

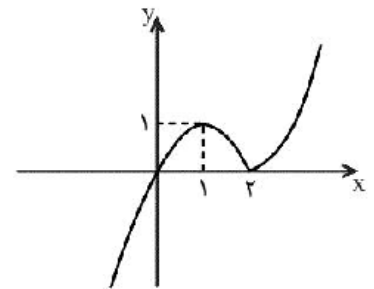
$$f(x) = (x-1)^2 + 2, D : x \geq 1 \Rightarrow y = (x-1)^2 + 2 \Rightarrow (x-1)^2 = (y-2) \Rightarrow x-1 = \sqrt{y-2}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{y-2} + 1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$$

اگر نمودار تابع را رسم کنیم با ضابطه‌بندی خواهیم داشت:

$$y = x|x-2| = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & x < 2 \end{cases}$$



این تابع وقتی $1 < x < 2$ نزولی است که برد آن در این فاصله، $0 < y < 1$ خواهد بود. پس دامنه تابع معکوس آن در این فاصله، $0 < x < 1$ است که مربوط به ضابطه $y = -x^2 + 2x$ می‌باشد.

$$y = -x^2 + 2x \Rightarrow -y = x^2 - 2x$$

$$\Rightarrow 1-y = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow (x-1)^2 = 1-y$$

$$\xrightarrow{1 < x < 2} x-1 = \sqrt{1-y} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{1-y}$$

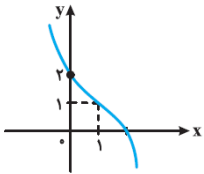
$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1-x} \quad (0 < x < 1)$$

ساده

نهایی ۱۴۰۲

گزینه درست: null

سوال ۶۵



$$y = -(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 1 \rightarrow y = -(x-1)^3 + 1$$

$$\rightarrow y - 1 = -(x-1)^3$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{y-1} = -(x-1) \rightarrow \sqrt[3]{1-y} = x-1$$

$$\rightarrow x = \sqrt[3]{y-1} + 1 \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{1-x} + 1$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۴

گزینه درست: null

سوال ۶۶

$$f \circ g^{-1}(4) = f(g^{-1}(4))$$

ابتدا باید مقدار $g^{-1}(4)$ را محاسبه کنیم:

$$g^{-1}(4) = a \Rightarrow g(a) = 4$$

با توجه به ضابطه‌ی g :

$$\frac{5a+2}{2a-1} = 4 \Rightarrow 5a+2 = 8a-4$$

$$3a = 6 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow g^{-1}(4) = 2$$

در نهایت:

$$f(g^{-1}(4)) = f(2) = 2^2 + 2 = 6$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۶۷

برای یافتن وارون تابع f باید x را بر حسب y به دست آوریم:

$$x^2 - 6x + 3 = y \xrightarrow{+6} x^2 - 6x + 9 = y + 6$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 = y+6 \Rightarrow x-3 = \pm\sqrt{y+6}$$

با توجه به دامنه داده شده، x منفی است، پس $x-3$ نیز منفی است. پس در عبارت بالا، فقط علامت منفی پشت رادیکال مورد قبول است:

$$x-3 = -\sqrt{y+6} \Rightarrow x = 3 - \sqrt{y+6} \quad (*)$$

چون طبق دامنه محدود شده داریم $x < 0$ ، پس:

$$3 - \sqrt{y+6} < 0 \Rightarrow 3 < \sqrt{y+6} \Rightarrow 9 < y+6 \Rightarrow y > 3 \quad (**)$$

روابط $(*)$ و $(**)$ ضابطه و دامنه وارون تابع f را مشخص می‌کنند:

$$f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x+6}; x > 3$$

ساده

نهایی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۶۸

$$-5 - \sqrt{3x+1} = y \Rightarrow 3x+1 = (y+5)^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{(y+5)^2 - 1}{3} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{(x+5)^2 - 1}{3} \quad D_{g^{-1}} = (-\infty, -5]$$

ساده

تشریحی ۱۴۰۰

گزینه درست: null

سوال ۶۹

به کمک رابطه $(fog)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ می توان نوشت:

$$g \circ f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

برای محاسبه $g(\frac{1}{3})$ باید $f^{-1}(x)$ را برابر $\frac{1}{3}$ قرار دهیم یا به عبارتی مقدار $f(\frac{1}{3})$ مطلوب است. پس:

$$f(\frac{1}{3}) = 3(\frac{1}{3}) - 1 = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = \frac{1}{3}$$

$$g(\frac{1}{3}) = g(f^{-1}(0)) = \frac{2(0)+1}{0-3} = \frac{-1}{3}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۷۰

در تابع fog داریم:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^3 - x) = x^6 - 2x^4 + x^2 + 1$$

$$\frac{x^3 - x = t}{x^6 - 2x^4 + x^2 = t^2} \rightarrow f(t) = t^2 + 1$$

برای به دست آوردن $f(3)$ داریم:

$$f(3) = 3^2 + 1 = 10$$

ساده

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۷۱

$f^{-1}(2) = -1$ است پس $f(-1) = 2$ می شود. ما حاصل $g^{-1}(f(-1))$ یعنی $g^{-1}(2)$ را می خواهیم. پس باید $g(x)$ را برابر ۲ بگذاریم:

$$g(x) = x^3 + x = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow g(1) = 2 \Rightarrow g^{-1}(2) = 1$$

ساده

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۷۲

ابتدا برد تابع را به دست می آوریم:

$$\sqrt{x+4} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x+4} \leq 0 \Rightarrow -\sqrt{x+4} - 3 \leq -3 \Rightarrow y \leq -3$$

بنابراین دامنه وارون تابع برابر $x \leq -3$ است.

حال ضابطه وارون را به دست می آوریم:

$$y = -\sqrt{x+4} - 3 \Rightarrow y + 3 = -\sqrt{x+4}$$

$$\xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} (y+3)^2 = x+4$$

$$x = y^2 + 6y + 5 \xrightarrow[y \rightarrow x]{x \rightarrow y} y = x^2 + 6x + 5$$

$y = x^2 + 6x + 5$; $x \leq -3$ وارون تابع

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۷۳

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \quad x \in D_{f^{-1} \circ f}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_{f^{-1} \circ f} = D_f = R_{f^{-1}} = [-2, 3] \\ R_{f^{-1} \circ f} = D_{f^{-1} \circ f} = [-2, 3] \end{cases}$$

سوال ۷۴

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

$$f^{-1}(g(a)) = f(o) \Rightarrow g(a) = f(f(o)) = f(1) = 3$$

$$\Rightarrow g(a) = 1 + \frac{1}{4}\sqrt{a-1} = 3 \Rightarrow \frac{1}{4}\sqrt{a-1} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{a-1} = 4 \Rightarrow a = 16 + 1 = 17$$

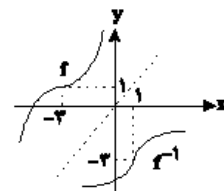
سوال ۷۵

گزینه درست: null

تشریحی ۱۴۰۰

ساده

قرینه نمودار تابع را نسبت به خط $y = x$ رسم می‌کنیم:



سوال ۷۶

گزینه درست: null

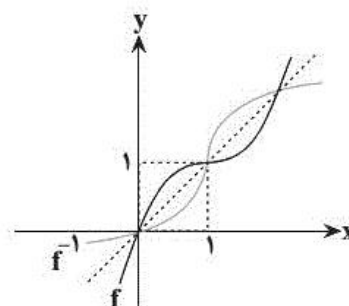
تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را رسم کرده و سپس نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم: برای رسم نمودار

$$f(x) = 1 - (1-x)^3 \Rightarrow f(x) = 1 - (-(x-1))^3 = 1 + (x-1)^3$$

کافی است که نمودار تابع $y = x^3$ را یک واحد به سمت راست و بالا منتقل کنیم، بنابراین شکل دو نمودار $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ به صورت زیر است:



همان‌طور که می‌بینید، نمودار تابع f^{-1} از ناحیه اول و سوم عبور می‌کند.

سوال ۷۷

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۵

دشوار

ابتدا ضابطه‌ی نمودار انتقال‌یافته را می‌یابیم:

$$\sqrt{1-2x} \xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}} y = \sqrt{1-2(x+1)} = \sqrt{1-2x-2}$$

$$\sqrt{-1-2x} \xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} y = 1 + \sqrt{-1-2x}$$

حال ضابطه‌ی معکوس را می‌یابیم. دقت کنید که برد تابع حاصل بازه‌ی $(1, +\infty]$ است. پس دامنه‌ی y^{-1} به صورت $x \geq 1$ است:

$$y = 1 + \sqrt{-1-2x} \Rightarrow y - 1 = \sqrt{-1-2x} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (y-1)^2 = -1-2x$$

$$\Rightarrow y^2 - 2y + 1 = -1 - 2x \Rightarrow -2x = y^2 - 2y + 2 \Rightarrow x = \frac{y^2 - 2y + 2}{-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$$

دشوار

نهایی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۷۸

$$f(x) = -\frac{y}{x} - \frac{y}{x} = y \Rightarrow -\frac{y}{x} = y + \frac{y}{x} \Rightarrow x = -\frac{y}{y+1} \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{y}{y+1}$$

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۷۹

(الف)

$$\{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 - 1 \geq 3\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 2\} = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$$

(ب)

$$2x^2 - 1 = 7 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow g^{-1}(7) = 2$$

$$\sqrt{x-3} = 2 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(7)) = f^{-1}(2) = 7$$

(پ)

$$f(4) = 1$$

$$\rightarrow A(4, 1) \xrightarrow{A^4 \in f^{-1}} A^{-1}(1, 4)$$

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۸۰

چون f یک به یک است، پس وارون پذیر است و

$$f(x) = y = \sqrt{x-2} \rightarrow D_f = [2, +\infty)$$

$$x = y^2 + 2 \rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 2, x \geq 0$$

$$\left. \begin{aligned} f \circ f^{-1}(x) &= f(f^{-1}(x)) = \dots = x & x \geq 0 \\ f^{-1} \circ f(x) &= f^{-1}(f(x)) = \dots = x & x \geq 2 \end{aligned} \right\}$$

دشوار

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۸۱

ابتدا ضابطه $g(f(x))$ را تشکیل می دهیم:

$$g(f(x)) = a(1-2x) - 1 = a - 2ax - 1$$

اکنون چون $g(f(x))$ و g روی محور x ها متقاطع اند، پس طول نقطه تقاطع برابر با ریشه g و ریشه $g \circ f$ است.

$$\Rightarrow \begin{cases} g(f(x)) = 0 \Rightarrow a - 2ax - 1 = 0 \Rightarrow a - 1 = 2ax \Rightarrow \frac{a-1}{2a} = x \\ g(x) = 0 \Rightarrow ax - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{a} \end{cases}$$

چون ریشه $g \circ f$ و g یکسان است، پس داریم:

$$\frac{a-1}{2a} = \frac{1}{a} \xrightarrow{a \neq 0} \frac{a-1}{2} = 1 \Rightarrow a - 1 = 2 \Rightarrow a = 3$$

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۸۲

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = \frac{1}{\lambda} x^3 - 2 \Rightarrow (fog)(x) = \frac{1}{\lambda} x^3 - 2$$

حال اگر $(fog)(x) = y$ در نظر بگیریم، داریم:

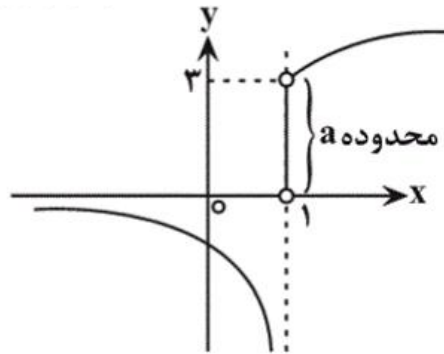
$$y = \frac{1}{\lambda} x^3 - 2 \Rightarrow y + 2 = \frac{x^3}{\lambda} \Rightarrow \sqrt[3]{y+2} = \frac{x}{\lambda}$$

$$\Rightarrow x = \lambda \sqrt[3]{y+2} \xrightarrow[\text{را عوض می کنیم.}]{\text{جای } x \text{ و } y} y = 2 \sqrt[3]{x+2} \Rightarrow (fog)^{-1}(x) = 2 \sqrt[3]{x+2}$$

$$(b) (fog)^{-1}(25) = 2 \sqrt[3]{25+2} = 2 \sqrt[3]{27} = 2 \times 3 = 6$$

با توجه به نمودار تابع، a می‌تواند مقادیر زیر را اختیار کند:

$$0 \leq a \leq 3 \Rightarrow a = \{0, 1, 2, 3\}$$



راه دوم:

برد هر شاخه را پیدا می‌کنیم:

$$x > 1 \Rightarrow x + 1 > 2 \Rightarrow \sqrt{x+1} > 1$$

$$x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} < 0$$

می‌دانیم که برای یک‌به‌یک شدن نباید در برد توابع شاخه‌ها، اشتراکی باشد پس:

$$0 \leq a \leq 3 \Rightarrow a = \{0, 1, 2, 3\}$$

ابتدا x را برحسب y به دست می‌آوریم:

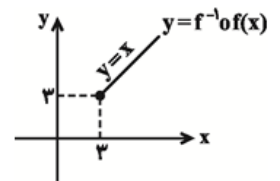
$$\begin{aligned} y = x^2 - 4x + 1 &\Rightarrow y + 3 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow y + 3 = (x - 2)^2 \\ \Rightarrow x - 2 = \pm \sqrt{y + 3} &\xrightarrow{x < 0} x - 2 = -\sqrt{y + 3} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{y + 3} \end{aligned}$$

حال کافیت جای x و y را عوض کنیم:

$$y = 2 - \sqrt{x + 3} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x + 3} \Rightarrow 2 - \sqrt{x + 3} < 0 \Rightarrow x > 1$$

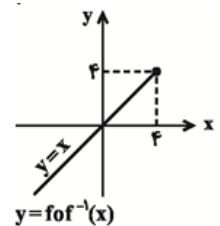
می‌دانیم $y = f^{-1} \circ f(x)$ تابعی همانی روی دامنه f است. پس نمودار $y = f^{-1} \circ f(x)$ به شکل مقابل است:

$$(D_f = [3, +\infty))$$



از سوی دیگر $y = f \circ f^{-1}(x)$ تابع همانی روی برد f (دامنه f^{-1}) است پس نمودار $y = f \circ f^{-1}(x)$ به شکل مقابل است:

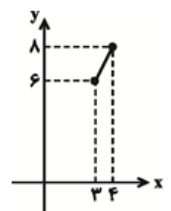
$$(R_f = (-\infty, 4])$$



دامنه $g(x)$ اشتراک دامنه‌های $f \circ f^{-1}(x)$ و $f^{-1} \circ f(x)$ می‌باشد یعنی: $D_g = [3, 4]$ و ضابطه $g(x)$ نیز جمع ضابطه‌های $f^{-1} \circ f(x) = x$ و $f \circ f^{-1}(x) = x$ می‌باشد. بنابراین:

$$g(x) = 2x \quad 3 \leq x \leq 4$$

پس نمودار $y = g(x)$ به شکل مقابل است:

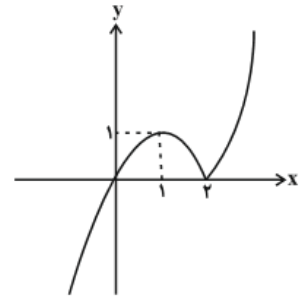


بنابراین طول نمودار تابع $g(x)$ برابر است با:

$$d = \sqrt{(3-4)^2 + (6-8)^2} = \sqrt{5}$$

اگر نمودار تابع را رسم کنیم با ضابطه‌بندی خواهیم داشت:

$$y = x|x-2| = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & x < 2 \end{cases}$$



این تابع در محدوده‌ی $1 < x < 2$ نزولی است که برد آن در این فاصله، $0 < y < 1$ خواهد بود. پس دامنه‌ی تابع معکوس آن در این فاصله، $0 < x < 1$ است که مربوط به ضابطه‌ی $y = -x^2 + 2x$ می‌باشد.

$$y = -x^2 + 2x \Rightarrow -y = x^2 - 2x$$

$$\Rightarrow 1 - y = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow (x-1)^2 = 1 - y$$

$$\Rightarrow x-1 = \sqrt{1-y} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{1-y}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1-x} \quad (0 < x < 1)$$

با توجه به ریشه‌های داخل هر قدر مطلق، تابع f را بعد از تعیین علامت عبارت‌های داخل قدرمطلق، بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 6 + x + 1 & x < -1 \\ -2x + 6 - x - 1 & -1 \leq x \leq 3 \\ 2x - 6 - x - 1 & x > 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x + 7 & , \quad x < -1 \\ -3x + 5 & , \quad -1 \leq x \leq 3 \\ x - 7 & , \quad x > 3 \end{cases}$$

با توجه به شیب خط‌های حاصل، تابع f در فاصله‌ی $x > 3$ صعودی است (ضریب x مثبت است). پس ضابطه‌ی معکوس تابع را در این

فاصله می‌یابیم: $f(x) = x - 7$ و $x > 3$

$$y = x - 7 \Rightarrow x = y + 7 \Rightarrow \text{تابع معکوس}$$

دامنه‌ی تابع معکوس که همان برد تابع f است، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$x > 3 \Rightarrow x - 7 > -4 \Rightarrow f^{-1} \text{ دامنه‌ی } x > -4$$

پس ضابطه‌ی تابع معکوس عبارت است از: $y = x + 7$ و $x > -4$

ابتدا صورت کسر را تجزیه می‌کنیم. $x = 1$ صورت این عبارت را صفر می‌کند، پس $(x-1)$ یکی از عامل‌های این عبارت است.

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + 9x - 5 \quad \Bigg| \quad \frac{x-1}{x^2 - 4x + 5} \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \\ -4x^2 + 9x - 5 \\ \underline{-(-4x^2 + 4x)} \\ 5x - 5 \\ \underline{-(5x - 5)} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= \frac{(x^2 - 4x + 5)(x-1)}{x-1} = x^2 - 4x + 5 \\ \Rightarrow y &= x^2 - 4x + 4 + 1 = (x-2)^2 + 1 \Rightarrow (x-2)^2 = y-1 \\ \Rightarrow x-2 &= \pm\sqrt{y-1} \xrightarrow{x \geq 2} x-2 = \sqrt{y-1} \\ \Rightarrow x &= \sqrt{y-1} + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 2 \end{aligned}$$

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، پس $x \geq 1$ است.

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 2 \quad x \geq 1$$

اگر $f^{-1}(4) = a$ باشد، آن‌گاه داریم: $f(a) = 4$. حال مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$f(a) = g(2a + 5) = 4 \Rightarrow 2a + 5 = g^{-1}(4)$$

$$\xrightarrow{g^{-1}(4) = \sqrt{4 \times 4} = 2} 2a + 5 = 2 \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$a = f^{-1}(4) = -\frac{3}{2} \quad \text{بنابراین:}$$