



تشریحی ۱۳۹۹ ساده

۱

در اثبات درستی رابطه $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$ به کمک اثبات بازگشتی به کدام رابطه بدیهی می‌رسیم؟ (a و b دو عدد حقیقی مثبت: ۱ هستند.)

تشریحی ۱۳۹۷ ساده

۲

اگر α و β دو عدد گنگ ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، آنگاه $\alpha - \beta$ است و $\alpha + 2\beta$ است. بارم: ۱

تشریحی ۱۳۹۸ ساده

۳

در اثبات نامساوی $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$ به روش اثبات بازگشتی، به کدام رابطه بدیهی می‌رسیم؟ بارم: ۱

تشریحی ۱۳۹۸ متوسط

۴

در اثبات نامساوی $(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$ به روش بازگشتی، رابطه بدیهی به دست آمده کدام است؟ (a و b دو عدد حقیقی-بارم: ۱ مثبت هستند.)

تشریحی ۱۳۹۹ متوسط

۵

به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n، عدد $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ عددی زوج است؟ بارم: ۱

تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

۶

چند مقدار طبیعی n ($1 \leq n \leq 20$) وجود دارد که به ازای آن، حاصل $\frac{n^2(n+1)^2}{9}$ مضرب ۳ باشد؟ بارم: ۱

تشریحی ۱۳۹۸ متوسط

۷

برای اثبات نامساوی $4x^2 + y^2 \geq 2(xy - y - 2x - 2)$ به صورت بازگشتی، به کدام رابطه بدیهی می‌رسیم؟ ($x, y \in \mathbb{R}$) بارم: ۱

نهایی ۱۴۰۱ ساده

۸

چند عضو از مجموعه $S = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 630\}$ نه بر ۳ و نه بر ۵ بخشپذیرند؟ بارم: ۱

نهایی ۱۴۰۰ ساده

۹

الف) گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم ارز) ثابت کنید:
(برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$)
ب) ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد فرد متوالی به علاوه یک، مربع کامل است. بارم: ۱

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۸ متوسط

۱۰

الف) اگر α و β دو عدد گنگ ولی $\alpha - \beta$ گویا باشد، ثابت کنید: $3\alpha + 2\beta$ گنگ است.
ب) اگر α گنگ و q گویا باشد، به ازای چند مقدار از q عدد $2q^2\alpha + \alpha - 3q\alpha$ گویاست؟ بارم: ۲

تشریحی ۱۳۹۸ متوسط

۱۱

در اثبات گزاره «اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، آنگاه $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$ » به روش بازگشتی به کدام گزاره همواره ۱ درست می‌رسیم؟

(۱۲)

تشریحی ۱۳۹۹ متوسط

اگر a, b, c و d اعدادی حقیقی باشند، در اثبات نامساوی $(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) \leq (ac - bd)^2$ به روش بازگشتی به کدام رابطه بارم: ۱ بدیهی می‌رسیم؟

(۱۳)

تشریحی ۱۳۹۸ متوسط

به ازای چند مقدار n از مجموعه $\{1, 2, \dots, 20\}$ عدد $\frac{n^2(n+1)^2}{9}$ یک عدد زوج است؟ بارم: ۱

(۱۴)

تشریحی ۱۴۰۱ ساده

هر یک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض کنید.
(الف) برای هر عدد طبیعی n عدد $2^n + 1$ اول است.
(ب) مربع هر عدد فرد، عددی فرد است.

(۱۵)

تشریحی ۱۳۹۹ ساده

در اثبات نامساوی $a^2 + b^2 \geq -4(a + b + 2)$ به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) به کدام رابطه همیشه درست می‌رسیم؟ بارم: ۱

(۱۶)

تشریحی ۱۳۹۸ متوسط

اگر a و b دو عدد حقیقی غیر صفر و نابرابر باشند، آنگاه چند زوج مرتب (a, b) وجود دارد به گونه ای که رابطه ی $\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ برقرار باشد؟ بارم: ۱

(۱۷)

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۷ متوسط

نشان دهید اگر θ در ناحیه اول مثلثاتی باشد، آنگاه:
 $\sin \theta + \cos \theta \geq \sqrt{2 \sin 2\theta}$ بارم: ۲

(۱۸)

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۷ متوسط

اگر α و β اعداد گنگ و $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید: $2\alpha - \beta$ گنگ است. بارم: ۱.۵

(۱۹)

تشریحی ۱۳۹۷ دشوار

به ازای چند n طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰، $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ زوج است؟ بارم: ۱

(۲۰)

تشریحی ۱۳۹۷ ساده

چند زوج مرتب (a, b) از اعداد صحیح و ناصفر وجود دارد به گونه‌ای که رابطه $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ برقرار باشد؟ بارم: ۱

(۲۱)

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۷ متوسط

اگر $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ و $ab \neq 0$ باشد و $\frac{a\sqrt{2}+c}{b\sqrt{2}+d}$ عددی گویا باشد، نشان دهید:
 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ بارم: ۲

(۲۲)

تشریحی ۱۴۰۰ متوسط

اعداد طبیعی و متوالی $a_1, a_2, \dots, a_5$ مفروض‌اند. حاصل $\frac{\sum_{i=1}^5 a_i}{5} - a_1$ کدام است؟ $(a_2 > a_1)$ بارم: ۱

(۲۳)

تشریحی ۱۳۹۹ متوسط

اگر $A = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ باشد، به ازای چند عدد n از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 90\}$ عدد A زوج است؟ بارم: ۱

۲۴

ساده

نهایی ۱۳۹۹

بارم: ۱

ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

۲۵

ساده

نهایی ۱۳۹۹

بارم: ۱

درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

(الف) برای هر دو عدد حقیقی x و y ، داریم $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

(ب) اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آن گاه $a = 0$ یا $b = 0$.

(پ) اگر $a, b \in \mathbb{R}$ ، داریم: $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.

(ت) حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

۲۶

متوسط

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۸

بارم: ۲

ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، عبارت $n^2 - 5n + 9$ عددی فرد است.

۲۷

دشوار

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۸

بارم: ۲

اگر $a > 0$ ، ثابت کنید: $a^2 + \frac{2}{a} \geq 3$.

۲۸

ساده

تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱

چند زوج مرتب (a, b) از اعداد صحیح و ناصفر وجود دارد به گونه‌ای که رابطه $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ برقرار باشد؟

۲۹

ساده

نهایی ۱۳۹۹

بارم: ۱

فرض کنیم a و n دو عدد طبیعی باشند به طوری که $a \mid 2n+3$ ، $a \mid 3n+4$. نشان دهید $a = 1$.

۳۰

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱

در تقسیم عدد طبیعی سه رقمی a بر عدد طبیعی b ، خارج قسمت ۲۱ و باقی‌مانده ۳۷ است. چند عضو از مجموعه جواب‌های a ، مضرب ۵ است؟

۳۱

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

بارم: ۱

در یک تقسیم، مقسوم ۱۲۸ واحد بیشتر از مقسوم‌علیه و باقی‌مانده برابر ۲۰ است. خارج قسمت این تقسیم حداکثر کدام است؟

۳۲

متوسط

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۸

بارم: ۱.۵

(الف) اگر $a > 0$ و $a \mid 9k+4$ و $a \mid 5k+3$ ، ثابت کنید a اول است.

(ب) اگر $x^2 = 5 + y^2$ و $d \mid x$ مقدار $d > 1$ را به دست آورید. $(x, y \in \mathbb{N})$.

۳۳

متوسط

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۷

بارم: ۲

همه اعداد طبیعی n را به نحوی بیاورید که $n+1 \mid n^2+1$.

۳۴

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱

اگر $x^3 - x$ بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد، تفاضل بیشترین و کمترین عدد طبیعی دو رقمی x کدام است؟

۳۵

متوسط

تشریحی ۱۳۹۴

بارم: ۱

به ازای چند عدد طبیعی و دو رقمی n ، دو عدد به صورت‌های $11n+4$ ، $25n+9$ ، نسبت به هم اول‌اند؟

۳۶

ساده

تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱

روی منحنی $y = \frac{4x-1}{x+3}$ ، چند نقطه با مختصات طبیعی وجود دارد؟

(۳۷)

تشریحی ۱۳۹۸

دشوار

به ازای چند مقدار طبیعی و دو رقمی n ، $12 + n^2$ بر ۱۳ بخش پذیر است؟

بارم: ۱

(۳۸)

تشریحی ۱۴۰۰

متوسط

اگر n عدد صحیح و $d = (n^2 - 4n, 5n + 6)$ عددی اول باشد، آنگاه بزرگترین مقدار d کدام است؟

بارم: ۱

(۳۹)

تشریحی ۱۳۹۸

ساده

به ازای چند عدد طبیعی n ، هر دو عدد $\frac{n+3}{5}$ و $\frac{n^3+2n}{10}$ اعدادی صحیح هستند؟

بارم: ۱

(۴۰)

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

دشوار

اگر n عددی صحیح باشد، نشان دهید $5 \mid n^5 - n$.

بارم: ۲

(۴۱)

نهایی ۱۳۹۹

ساده

اگر باقی مانده تقسیم اعداد a و b بر ۱۷ برابر ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $(2a - 5b)$ بر ۱۷ را بیابید.

بارم: ۱

(۴۲)

تشریحی ۱۴۰۰

ساده

اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر اعداد ۴ و ۷ به ترتیب برابر ۳ و ۲ باشد، آنگاه باقی مانده تقسیم عدد a بر ۲۸ کدام است؟

بارم: ۱

(۴۳)

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

اگر a عددی طبیعی و بزرگتر از یک باشد، به گونه ای که $5 \mid 6a$ و $5 \mid 3a - 5$ آنگاه چند مقدار برای a وجود دارد؟

بارم: ۱

 $(n \in \mathbb{N})$

(۴۴)

تشریحی قلمچی ۱۳۹۹

متوسط

چند نقطه با مختصات صحیح بر روی منحنی $2xy - x + y - 3 = 0$ قرار دارد؟

بارم: ۲

(۴۵)

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

در تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۷، باقی مانده تقسیم از مربع خارج قسمت آن ۲ واحد کمتر است. بزرگترین مقدار a مضرب کدام بارم: ۱

بارم: ۱

(۴۶)

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

اگر a عددی طبیعی باشد، آنگاه به ازای چند مقدار a ، عدد $2 + a^2$ بر عدد $2 + a$ بخش پذیر است؟

بارم: ۱

(۴۷)

تشریحی ۱۳۹۹

ساده

در تقسیم عدد طبیعی a بر ۲۳، باقی مانده ۷ برابر خارج قسمت است. مجموع ارقام بزرگترین عدد طبیعی a کدام است؟

بارم: ۱

(۴۸)

تشریحی ۱۳۹۴

ساده

به ازای چند عدد اول p ، حاصل $13p + 5$ عددی اول است؟

بارم: ۱

(۴۹)

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

چند عدد طبیعی وجود دارد که باقی مانده تقسیم ۹۶ بر هر یک از آنها، برابر ۶ باشد؟

بارم: ۱

(۵۰)

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

اگر a و b دو عدد صحیح فرد باشند، آنگاه بزرگترین عددی که $a^4 - b^4$ همواره بر آن بخش پذیر می باشد، کدام است؟

بارم: ۱

(۵۱)

تشریحی قلمچی ۱۳۹۸

متوسط

اگر $7 \mid 6k + 1$ ، $49 \mid 36k^2 + 54k + a$ ، $a > 0$ را به دست آورید.

بارم: ۲

۵۲

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

در تقسیم عدد طبیعی a بر ۲۳ ، باقی‌مانده ۷ برابر خارج قسمت است. مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد طبیعی a کدام است؟
بارم: ۱

۵۳

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

اگر a و b دو عدد صحیح باشند به طوری که $۲a + ۳b | ۵a + ۷b$ ، حداقل مقدار $m + n$ به گونه‌ای که $۲a + ۳b | ma$ و $۲a + ۳b | nb$ ،
بارم: ۱
کدام است؟ $(m, n \in \mathbb{N})$

۵۴

نهایی ۱۳۹۹

متوسط

ثابت کنید اگر $p > ۳$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = ۶k + ۱$ یا $p = ۶k + ۵$ ($k \in \mathbb{W}$) نوشته می‌شود.
بارم: ۱

۵۵

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۹

ساده

اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد m و n بر ۳۷ به ترتیب ۱۵ و ۲۹ باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد $۳m - ۲n$ بر ۳۷ چند است؟
بارم: ۲

۵۶

تشریحی ۱۳۹۹

ساده

روی نمودار تابع $y = \frac{۳x + ۴}{x + ۲}$ ، چند نقطه با مختصات طبیعی وجود دارد؟
بارم: ۱

۵۷

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

در تقسیم عدد طبیعی سه رقمی a بر عدد طبیعی b ، خارج قسمت ۲۱ و باقی‌مانده ۳۷ است. چند عضو از مجموعه جواب‌های a مضرب ۵ می‌باشد؟
بارم: ۱

۵۸

نهایی ۱۴۰۱

متوسط

باقی مانده تقسیم عدد $۲۰۰! + ۱۹۹! + ۱۹۸! + \dots + ۲! + ۱!$ را بر ۱۵ بدست آورید. (نماد فاکتوریل می‌باشد)
بارم: ۱

۵۹

تشریحی ۱۳۹۸

دشوار

چند نقطه با مختصات صحیح بر روی منحنی $۸y - x^2 - ۴x - ۱۱ = ۰$ قرار دارد؟
بارم: ۱

۶۰

تشریحی ۱۳۹۶

متوسط

در یک عمل تقسیم، مقسوم ۸ برابر باقیمانده است و باقیمانده حداکثر مقدار خود را دارا می‌باشد. مقسوم کدام است؟
بارم: ۱

۶۱

تشریحی ۱۳۹۸

ساده

با توجه به نمادهای «بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک» عدد $[۱۵۴, (۴۲۹, ۶۲۷)]$ ، کدام است؟
بارم: ۱

۶۲

تشریحی ۱۳۹۹

ساده

اگر a بزرگ‌ترین عدد طبیعی باشد که در تقسیم بر ۳۷ ، خارج قسمت و باقی‌مانده تقسیم، دو عدد متوالی باشند، آن گاه مجموع ارقام a کدام است؟
بارم: ۱

۶۳

تشریحی ۱۴۰۰

متوسط

چند عدد طبیعی a وجود دارد به طوری که دو عدد $۳ + ۷n$ و $۳n + a$ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ نسبت به هم اول باشند؟
بارم: ۱

۶۴

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $n^2 + n$ و $۳n - ۱$ ، برای مقادیر مختلف طبیعی n ، چند مقدار متفاوت می‌تواند داشته باشد؟
بارم: ۱

۶۵

تشریحی ۱۳۹۴

متوسط

اگر $۷۲ = (n^4 - n, n^3 - n)$ باشد، حاصل $n^2 + n$ کدام است؟
بارم: ۱

۶۶

تشریحی ۱۳۹۸

دشوار

در یک تقسیم، باقی‌مانده برابر ۸ است. با افزودن k واحد به مقسوم و با ثابت ماندن مقسوم‌علیه، خارج قسمت یک واحد افزایش یافته و باقی‌مانده برابر ۲ گردیده است. k چند عدد طبیعی یک رقمی می‌تواند باشد؟
بارم: ۱

۶۷

$(a^2 - 4a + 1, a - 3)$ چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟ $(a \in \mathbb{Z})$

بارم: ۱

۶۸

اگر عدد طبیعی a ، دو عدد $(5k + 9)$ و $(8k + 13)$ را عاد کند، ثابت کنید: $a = 1$ یا $a = y$

بارم: ۱

سوال ۱

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۹

ساده

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b \Leftrightarrow \frac{a^3 + b^3}{ab} \geq a + b$$

$$\xleftrightarrow{ab > 0} a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$$

$$\Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a + b)$$

$$\xleftrightarrow{a+b > 0} a^2 - ab + b^2 \geq ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$$

سوال ۲

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۷

ساده

می‌دانیم جمع و تفریق عدد گویا و گنگ همواره گنگ است. بنابراین با توجه به آنکه $\alpha + \beta$ گویا و β گنگ است پس جمع آنها یعنی $\alpha + 2\beta$ گنگ می‌شود. از طرفی وقتی β گنگ است پس 2β نیز گنگ است. در نتیجه $\underbrace{(\alpha + \beta)}_{\text{گویا}} - \underbrace{2\beta}_{\text{گنگ}} = \alpha - \beta$ نیز گنگ خواهد بود.

سوال ۳

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۸

ساده

$$a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \geq a^2c^2 + b^2d^2 + 2acbd$$

$$\Leftrightarrow a^2d^2 - 2acbd + b^2c^2 \geq 0 \Leftrightarrow (ad - bc)^2 \geq 0$$

سوال ۴

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

$$(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4 \Leftrightarrow 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 \geq 4 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Rightarrow (a - b)^2 \geq 0$$

رابطه اخیر بدیهی است و روابط همگی برگشت‌پذیرند، بنابراین حکم به روش بازگشتی اثبات می‌شود.

سوال ۵

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

فرض کنید $\frac{n^2(n+1)}{4}$ عددی زوج باشد، در این صورت عدد $\frac{n(n+1)}{2}$ نیز قطعاً عددی زوج است و داریم:

$$\frac{n(n+1)}{2} = 2k (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow n(n+1) = 4k$$

رابطه فوق در صورتی امکان‌پذیر است که یکی از دو عدد متوالی n و $n+1$ بر ۴ بخش‌پذیر باشد، یعنی عدد n به یکی از دو صورت $4k'$ یا $4k'-1$ ($k' \in \mathbb{Z}$) باشد، داریم:

$$10 \leq 4k' \leq 99 \xrightarrow{k' \in \mathbb{Z}} 3 \leq k' \leq 24 \rightarrow \text{عدد } 22$$

$$10 \leq 4k'-1 \leq 99 \xrightarrow{k' \in \mathbb{Z}} 11 \leq 4k' \leq 100 \rightarrow 3 \leq k' \leq 25 \rightarrow \text{عدد } 23$$

پس در مجموع ۴۵ عدد طبیعی دو رقمی n با مشخصات مورد نظر وجود دارد.

دشوار

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۶

اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{9}$ مضرب ۳ باشد، آنگاه $n^2(n+1)^2$ مضرب ۲۷ است، یعنی حداقل دارای سه عامل ۳ است. زمانی این موضوع امکان پذیر است که یکی از دو عدد n یا $n+1$ مضرب ۹ باشد. بنابراین مقادیر ممکن برای n عبارت اند از: ۸، ۱۷، ۱۸ و ۹

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۷

$$4x^2 + y^2 \geq 2(xy - y - 2x - 2)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + y^2 - 2xy + 2y + 4x + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 2y^2 - 2xy + 4y + 4x + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 2xy + y^2) + (4x^2 + 4x + 4) + (y^2 + 4y + 4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - y)^2 + (2x + 2)^2 + (y + 2)^2 \geq 0$$

رابطه اخیر بدیهی است.

ساده

نهایی ۱۴۰۱

گزینه درست: null

سوال ۸

$$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

$$\Rightarrow |\overline{A \cup B}| = 336 \quad |S| = 630, \quad |A| = 210, \quad |B| = 126, \quad |A \cap B| = 42$$

ساده

نهایی ۱۴۰۰

گزینه درست: null

سوال ۹

$$2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0, (y-1)^2 \geq 0, (x-y)^2 \geq 0$$

اثبات به روش مستقیم است:

فرض کنید $2k+1$ و $2k+3$ دو عدد فرد متوالی دلخواه باشند می توان نوشت:

$$(2k+1)(2k+3) + 1 = 4k^2 + 8k + 4 = 4(k^2 + 2k + 1) = 4(k+1)^2$$

بنابراین می توان حکم را نتیجه گرفت.

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۱۰

الف) فرض کنیم $3\alpha + 2\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف)

پس گویاست.

$$\alpha - \beta \in Q \rightarrow 2(\alpha - \beta) \in Q \rightarrow$$

$$2(\alpha - \beta) + (3\alpha + 2\beta) \in Q \rightarrow 5\alpha \in Q (1)$$

از طرفی چون α گنگ است پس 5α نیز گنگ است.

و این در تناقض با رابطه (۱) است پس فرض خلف باطل است

(ب)

$$(2q^2 - 3q + 1)\alpha \in Q \xrightarrow{\alpha \notin Q \rightarrow \alpha \neq 0}$$

$$2q^2 - 3q + 1 = 0 \rightarrow (2q - 1)(q - 1) = 0$$

$$q = 1 \text{ یا } q = \frac{1}{2}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۱۱

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2ab + 2a + 2b$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \geq 0$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۱۲

$$(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) \leq (ac - bd)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 + b^2d^2 \leq a^2c^2 + b^2d^2 - 2acbd \Leftrightarrow$$

$$a^2d^2 + b^2c^2 - 2adbc \geq 0 \Leftrightarrow (ad - bc)^2 \geq 0$$

رابطه اخیر بدیهی است و تمامی روابط بازگشت پذیر هستند.

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۱۳

برای این که عدد $\frac{n^2(n+1)}{9}$ ، عددی زوج باشد، لازم است جذر آن یعنی $\frac{n(n+1)}{3}$ عددی زوج باشد. دو عدد n و $n+1$ ، دو عدد متوالی هستند و در نتیجه حاصل ضرب آنها همیشه عددی زوج است، پس لازم است $n(n+1)$ عددی مضرب ۳ باشد. در این صورت داریم: $(k, q \in \mathbb{Z})$

$$n(n+1) = 3k \Rightarrow \begin{cases} n = 3q \Rightarrow n = 3, 6, 9, 12, 15, 18 \\ n+1 = 3q \Rightarrow n = 3q-1 \Rightarrow n = 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 \end{cases}$$

بنابراین در مجموع ۱۳ مقدار مختلف برای n وجود دارد.

ساده

نهایی ۱۴۰۱

گزینه درست: null

سوال ۱۴

الف) نادرست، مثال نقض $n = 3$

$$(ب) \text{ درست، اثبات } a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$$

ساده

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۱۵

$$a^2 + b^2 \geq -4(a + b + 2) \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq -4a - 4b - 8$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 4a + 4b + 8 \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 + 4a + 4) + (b^2 + 4b + 4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a + 2)^2 + (b + 2)^2 \geq 0$$

رابطه اخیر همیشه درست است و روابط همگی برگشت پذیر هستند، پس اثبات به روش بازگشتی کامل می شود.

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۱۶

$$\begin{aligned} \frac{1}{a-b} &= \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a-b} = \frac{b-a}{ab} \Rightarrow \frac{1}{a-b} = \frac{a-b}{-ab} \\ \Rightarrow (a-b)^2 &= -ab \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab = -ab \\ \Rightarrow a^2 + b^2 - ab &= 0 \xrightarrow{(a-b)^2 = -ab} a^2 + b^2 + (a-b)^2 = 0 \end{aligned}$$

رابطه ی اخیر به ازای هیچ دو عدد حقیقی غیر صفر و تابرابر a و b برقرار نیست، پس هیچ زوج مرتبی مانند (a, b) وجود ندارد که در رابطه داده شده صدق کند.

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۱۷

چون θ در ربع اول است پس $\sin \theta > 0$, $\cos \theta > 0$ ، بنابراین:

$$(\sqrt{\sin \theta} - \sqrt{\cos \theta})^2 \geq 0$$

$$\rightarrow \sin \theta + \cos \theta - 2\sqrt{\sin \theta \cos \theta} \geq 0$$

$$\rightarrow \sin \theta + \cos \theta \geq 2\sqrt{\frac{1}{2} \sin 2\theta}$$

$$\rightarrow \sin \theta + \cos \theta \geq \sqrt{2 \sin 2\theta}$$

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۱۸

فرض کنیم $2\alpha - \beta \in Q$ (فرض خلف)

$$(2\alpha - \beta) + (\alpha + \beta) = 3\alpha \in Q$$

از طرف دیگر $\alpha \notin Q$, $3 \in Q$, $3 \neq 0 \rightarrow 3\alpha \notin Q$

بنابراین با هم در تناقض هستند پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

دشوار

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۱۹

می دانیم $\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ است، پس اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ زوج باشد، آنگاه $\frac{n(n+1)}{2}$ نیز زوج است. n و $n+1$ دو عدد متوالی هستند، پس قطعاً یکی زوج و دیگری فرد است. با توجه به آن که $\frac{n(n+1)}{2}$ زوج است، پس $n(n+1)$ باید مضرب ۴ باشد، در نتیجه ۲ حالت داریم:

$$n = 4k \xrightarrow{1 \leq n < 100} 1 \leq 4k < 100$$

۲۴ مقدار برای k به دست می آید. $\Rightarrow 1 \leq k < 25$

$$n+1 = 4k \Rightarrow n = 4k-1$$

$$\xrightarrow{1 \leq n < 100} 1 \leq 4k-1 < 100 \Rightarrow 2 \leq 4k < 101$$

۲۵ مقدار برای k به دست می آید. $\Rightarrow 1 \leq k \leq 25$

پس به ازای ۴۹ عدد طبیعی $1 \leq n < 100$ ، حاصل $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ زوج است.

ساده

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۲۰

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow (a+b)^2 = ab(*)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = ab \Rightarrow a^2 + b^2 + ab = 0$$

$$\xrightarrow{(*)} a^2 + b^2 + (a+b)^2 = 0$$

رابطه اخیر به ازای هیچ زوج مرتبی مانند (a, b) که در آن a و b اعداد صحیح و غیرصفر باشند، برقرار نیست.

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۲۱

اگر $\frac{a\sqrt{2}+c}{b\sqrt{2}+d} = \frac{m}{n}$ عددی گویا باشد، آنگاه

$$an\sqrt{2} + cn = bm\sqrt{2} + md \rightarrow (an - bm)\sqrt{2} = md - cn$$

اگر $an - bm \neq 0$ باشد، آنگاه سمت چپ گنگ است در حالی که سمت راست گویا است. این تناقض نشان می‌دهد که $an - bm = 0$ است. اما این نتیجه می‌دهد که $md - cn = 0$ یعنی:

$$\begin{cases} an = bm \\ md = cn \end{cases} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{m}{n} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

متوسط

تشریحی ۱۴۰۰

گزینه درست: null

سوال ۲۲

میانگین پنج عدد طبیعی متوالی برابر با عدد وسط است. از طرفی عبارت $\frac{\sum_{i=1}^5 a_i}{5}$ همان میانگین اعداد a_1 تا a_5 است که برابر عدد وسط آنها یعنی a_3 می‌شود و در نتیجه داریم:

$$a_3 - a_1 = 2$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۲۳

مجموع اعداد ۱، ۲، ... و n برابر است با:

$$A = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

اگر A زوج باشد، داریم:

$$A = \frac{n(n+1)}{2} = 2k \Rightarrow n(n+1) = 4k$$

از آنجا که n و $n+1$ دو عدد متوالی هستند، هر دو نمی‌توانند مضرب ۲ باشند، بنابراین n یا $n+1$ مضرب ۴ خواهد بود:

$$\begin{cases} n = 4q \Rightarrow 1 \leq 4q \leq 90 \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} 1 \leq q \leq 22 \\ n = 4q - 1 \Rightarrow 1 \leq 4q - 1 \leq 90 \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} 1 \leq q \leq 22 \end{cases}$$

هر یک از مجموعه‌های فوق ۲۲ عضو دارند؛ بنابراین به ازای ۴۴ مقدار مختلف n ، عدد A زوج می‌باشد.

ساده

نهایی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۲۴

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

نابرابری آخر برای نامنفی a, b همیشه درست است. اثبات بازگشتی و حکم برقرار است.

ساده

نهایی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۲۵

الف) نادرست

ب) درست

پ) نادرست

ت) نادرست

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۲۶

n یا زوج و یا فرد است

$$n = 2k \rightarrow n^2 - 5n + 9 = 4k^2 - 10k + 9 = 2(2k^2 - 5k + 4) + 1 = 2q + 1$$

$$n = 2k - 1 \rightarrow n^2 - 5n + 9 = 4k^2 - 4k + 1 - 10k + 5 + 9 = 2(2k^2 - 7k + 7) + 1 = 2q' + 1$$

دشوار

تشریحی قلمچی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۲۷

$$a^2 + \frac{2}{a} \geq 3 \xleftrightarrow{a > 0} a^3 + 2 \geq 3a$$

$$\rightarrow a^3 - 3a + 2 \geq 0 \longleftrightarrow a^3 - a - 2(a - 1) \geq 0$$

$$\rightarrow a(a^2 - 1) - 2(a - 1) \geq 0 \longleftrightarrow a(a - 1)(a + 1) - 2(a - 1) \geq 0$$

$$\rightarrow (a - 1)(a^2 + a - 2) \geq 0 \longleftrightarrow (a - 1)^2(a + 2) \geq 0$$

ساده

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۲۸

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow (a+b)^2 = ab(*)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = ab \Rightarrow a^2 + b^2 + ab = 0$$

$$\xrightarrow{(*)} a^2 + b^2 + (a+b)^2 = 0$$

رابطه اخیر به ازای هیچ زوج مرتبی مانند (a, b) که در آن a و b اعداد صحیح و غیرصفر باشند، برقرار نیست.

ساده

نهایی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۲۹

$$\frac{a|3n+4}{a|2n+3} \Rightarrow a|-2(3n+4)+3(2n+3) \Rightarrow a|1 \Rightarrow a=\pm 1 \xrightarrow{a \in N} a=1$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۳۰

بر طبق قضیه تقسیم (۱) $0 \leq 37 < b$ و $a = 21b + 37$ است.

$$(2) \quad 100 \leq 21b + 37 \leq 999 \Rightarrow 3 \leq b \leq 45$$

$$(1), (2) \Rightarrow 38 \leq b \leq 45$$

$$21 = 5k_1 + 1, \quad 37 = 5k_2 + 2$$

$$\Rightarrow a = (5k_1 + 1)b + 5k_2 + 2$$

$$\Rightarrow a = 5k' + b + 2$$

اگر a مضرب ۵ باشد، آنگاه $b + 2$ مضرب ۵ خواهد بود، یعنی $b = 5k - 2$ است و داریم:

$$38 \leq 5k - 2 \leq 45 \Rightarrow 40 \leq 5k \leq 47 \Rightarrow 8 \leq k \leq 9$$

بنابراین فقط دوجواب برای a ، مضرب ۵ است.

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۳۱

طبق قضیه تقسیم داریم:

$$a = bq + r \xrightarrow[r=20]{a=b+128} b + 128 = bq + 20 \Rightarrow b(q-1) = 108$$

از طرفی در عمل تقسیم، همواره $0 \leq r < b$ است، پس $b > 20$ و در نتیجه یکی از حالت‌های زیر امکان‌پذیر است:

$$b(q-1) = 108 = 108 \times 1 = 54 \times 2 = 36 \times 3 = 27 \times 4$$

بنابراین حداکثر مقدار خارج قسمت در این تقسیم، به‌ازای $b = 27$ حاصل می‌شود. داریم:

$$b(q-1) = 27 \times 4 \Rightarrow \begin{cases} b = 27 \\ q-1 = 4 \Rightarrow q = 5 \end{cases}$$

متوسط

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۳۲

(الف)

$$\left. \begin{aligned} a|9k+4 &\rightarrow a|-5(9k+4) = -45k-20 \\ a|5k+3 &\rightarrow a|9(5k+3) = 45k+27 \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow a|(-45k-20) + (45k+27) = 7 \xrightarrow{a>1} a=7$$

(ب)

$$x^2 - y^2 = 5 \rightarrow (x-y)(x+y) = 5 \rightarrow$$

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=5 \end{cases} \rightarrow x=3, \quad d|3 \xrightarrow{d>1} d=3$$

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۳۳

می‌دانیم که $n+1 \mid n^F - 1$ بنابرین: $n^F - 1 = (n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n+1)(n-1)(n^2 + 1)$

از طرفی طبق فرض سؤال $n+1 \mid n^F + 1$ بنابرین:

$$n+1 \mid (n^F + 1) - (n^F - 1) = 2 \rightarrow n+1 \mid 2$$

این یعنی ۲ یا ۱ یا -۱ یا $n+1 = -2$. پس:

$$\left. \begin{aligned} n+1 = -2 &\rightarrow n = -3 \\ n+1 = -1 &\rightarrow n = -2 \\ n+1 = 1 &\rightarrow n = 0 \\ n+1 = 2 &\rightarrow n = 1 \end{aligned} \right\}$$

اما چون n طبیعی است تنها $n=1$ قابل قبول است.

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۳۴

$$x^3 - x = 13q \Rightarrow x(x^2 - 1) = 13q$$

$$x(x-1)(x+1) = 13q$$

حاصل ضرب سه عامل x و $x-1$ و $x+1$ بر ۱۳ بخش پذیر است، بنابراین x یا $x-1$ یا $x+1$ باید مضرب ۱۳ باشد:

$$1) \ x = 13k \xrightarrow{x \text{ دورقمی است}} x_{\min} = 13, x_{\max} = 91$$

$$2) \ x-1 = 13k \Rightarrow x = 13k+1 \xrightarrow{x \text{ دورقمی است}} x_{\min} = 14, x_{\max} = 92$$

$$3) \ x+1 = 13k \Rightarrow x = 13k-1 \xrightarrow{x \text{ دورقمی است}} x_{\min} = 12, x_{\max} = 90$$

در بین مقادیر فوق، کمترین مقدار x عدد ۱۲ و بیشترین مقدار x ، ۹۲ است که تفاضل آنها $92 - 12 = 80$ می‌باشد.

متوسط

تشریحی ۱۳۹۴

گزینه درست: null

سوال ۳۵

اگر $d \mid (11n + 4, 25n + 9)$ ، آن گاه داریم:

$$\left. \begin{aligned} d \mid 11n + 4 &\xrightarrow{\times 25} d \mid 275n + 100 \\ d \mid 25n + 9 &\xrightarrow{\times 11} d \mid 275n + 99 \end{aligned} \right\} \Rightarrow d \mid \text{تفاضل}$$

بنابرین $d=1$ و در نتیجه به ازای تمامی ۹۰ عدد دو رقمی، این دو عدد نسبت به هم اول هستند.

ساده

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۳۶

$$\left. \begin{aligned} x + 3 \mid 4x - 1 \\ x + 3 \mid 4x + 12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x + 3 \mid 13 \Rightarrow x + 3 = 13 \quad \text{یا } -1 \text{ یا } 1 \text{ یا } -13$$

بنابرین تنها مقدار طبیعی ممکن برای x ، عدد ۱۰ است و $A = (10, 3)$ تنها نقطه با مختصات طبیعی روی این منحنی می‌باشد.

سوال ۳۷

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۸

دشوار

$$\left. \begin{array}{l} 13 \mid n^2 + 12 \\ 13 \mid 13 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 13 \mid n^2 - 1 \Rightarrow 13 \mid (n-1)(n+1)$$

$$\xrightarrow{\text{عدد اول است } 13} 13 \mid n-1 \quad \text{یا} \quad 13 \mid n+1$$

$$\rightarrow n = 13k + 1 \quad \text{یا} \quad n = 13k - 1$$

حاصل هر یک از مقادیر به ازای $k = 1$ تا $k = 7$ ، عددی دورقمی است.

سوال ۳۸

گزینه درست: null

تشریحی ۱۴۰۰

متوسط

$$\left. \begin{array}{l} d \mid n^2 - 4n \xrightarrow{\times 5} d \mid 5n^2 - 20n \\ d \mid 5n + 6 \xrightarrow{\times n} d \mid 5n^2 + 6n \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 26n$$

$$\left. \begin{array}{l} d \mid 26n \xrightarrow{\times 5} d \mid 130n \\ d \mid 5n + 6 \xrightarrow{\times 26} d \mid 130n + 156 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 156$$

$$\Rightarrow d \mid 2^2 \times 3 \times 13$$

بنابراین بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای d به شرط آنکه عدد اول باشد، برابر ۱۳ است.

سوال ۳۹

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۸

ساده

$$\left. \begin{array}{l} 5 \mid n + 3 \xrightarrow{\times n^2} 5 \mid n^3 + 3n^2 \\ 5 \mid n^3 + 2n \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 5 \mid 3n^2 - 2n$$

$$\left. \begin{array}{l} 5 \mid n + 3 \xrightarrow{\times 3n} 5 \mid 3n^2 + 9n \\ 5 \mid 3n^2 - 2n \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 5 \mid 11n$$

$$\left. \begin{array}{l} 5 \mid n + 3 \xrightarrow{\times 11} 5 \mid 11n + 33 \\ 5 \mid 11n \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 5 \mid 33$$

رابطه اخیر امکان‌پذیر نیست، بنابراین چنین مقداری برای n وجود ندارد.

سوال ۴۰

گزینه درست: null

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

دشوار

در ابتدا دقت کنید که

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n-1)(n+1)(n^2 + 1)$$

حال اگر $n = 5k$ آن‌گاه n عامل ۵ دارد. اگر $n = 5k + 1$ آن‌گاه $n - 1$ عامل ۵ دارد. اگر $n = 5k + 4$ آن‌گاه $n + 1$ عامل ۵ دارد.

اگر $n = 5k + 3$ یا $n = 5k + 2$ نیز خواهیم داشت.

$$n^2 + 1 = \begin{cases} (5k+2)^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5 = 5(5k^2 + 4k + 1) \\ (5k+3)^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 10 = 5(5k^2 + 6k + 2) \end{cases}$$

در این دو حالت نیز $n^2 + 1$ عامل ۵ دارد.

ساده

نهایی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۴۱

$$a = 17q + 5$$

$$b = 17q' + 3$$

$$\Rightarrow 2a - 5b = 17 \times 2q + 10 - 17 \times 5q' - 15 = 17(2q - 5q' - 1) + 12 = 17k + 12 \Rightarrow r = 12$$

ساده

تشریحی ۱۴۰۰

گزینه درست: null

سوال ۴۲

طبق قضیه تقسیم داریم: $(q, q' \in \mathbb{Z})$

$$\left. \begin{aligned} a = 7q + 2 &\xrightarrow{\times 8} 8a = 56q + 16 \\ a = 4q' + 3 &\xrightarrow{\times 7} 7a = 28q' + 21 \end{aligned} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} a = 28(2q - q') - 5$$

$$\Rightarrow a = \underbrace{28(2q - q' - 1)}_k + 28 - 5$$

$$\Rightarrow a = 28k + 23 (k \in \mathbb{Z})$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۲۸، برابر ۲۳ است.

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۴۳

$$\left. \begin{aligned} a \mid 6n - 5 &\xrightarrow{\text{به توان 2}} a^2 \mid (6n - 5)^2 \Rightarrow a^2 \mid 36n^2 - 60n + 25 \\ a^2 \mid 3n - 5 &\xrightarrow{\times 12n} a^2 \mid 36n^2 - 60n \end{aligned} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} a^2 \mid 25 \Rightarrow a \mid 5 \xrightarrow{a > 1} a = 5$$

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۴۴

ابتدا عبارت داده شده را به صورت یک کسر می نویسیم و یک کسر در صورتی صحیح است که صورت آن بر مخرجش بخش پذیر باشد.

$$2xy + y = x + 3 \Rightarrow y(2x + 1) = x + 3 \Rightarrow y = \frac{x + 3}{2x + 1} \in \mathbb{Z}$$

$$2x + 1 \mid x + 3 \xrightarrow{\times 2} 2x + 1 \mid 2x + 6 \left\{ \begin{array}{l} \text{تفریق} \rightarrow 2x + 1 \mid 5 \\ \begin{array}{l} 2x + 1 = \pm 1 \rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array} \\ 2x + 1 = \pm 5 \rightarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ x = -3 \end{array} \end{array} \right. \end{array}$$

پس ۴ نقطه با مختصات صحیح بر روی این منحنی قرار دارد.

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۴۵

$$a = bq + r, \quad r = q^2 - 2$$

$$a = 37q + q^2 - 2 \Rightarrow 0 \leq r < b \Rightarrow 0 \leq q^2 - 2 < 37$$

$$\Rightarrow 2 \leq q^2 < 39$$

از این رابطه معلوم می‌شود که حداکثر $q = 6$ خواهد بود.

$$a = 37q + q^2 - 2 \Rightarrow a = 37 \times 6 + 36 - 2 = 256 = 16k$$

سوال ۴۶

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

$$\left. \begin{aligned} a + 2|a + 2 &\xrightarrow{\times a} a + 2|a^2 + 2a \\ a + 2|a^2 + 2 &\end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a + 2|2a - 2$$

$$\left. \begin{aligned} a + 2|a + 2 &\xrightarrow{\times 2} a + 2|2a + 4 \\ a + 2|a^2 + 2 &\end{aligned} \right\} \Rightarrow a + 2|6$$

$$\Rightarrow a + 2 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

اگر $a + 2$ برابر ۳ یا ۶ باشد، آنگاه a عددی طبیعی خواهد بود، پس تنها دو مقدار برای a وجود دارد.

سوال ۴۷

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۹

ساده

$$a = 23q + 7q \Rightarrow 7q < 23 \Rightarrow q < \frac{23}{7} \Rightarrow q \leq 3$$

$$q_{\max} = 3 \Rightarrow a_{\max} = 30(3) = 90 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 9$$

سوال ۴۸

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۴

ساده

اگر $p = 2$ باشد داریم: عددی اول $\rightarrow 13p + 5 = 13 \times 2 + 5 = 31$

اگر p عدد اول غیر ۲ باشد، چون سایر اعداد اول، فرد هستند، حاصل $13p$ فرد است و با ۵ که جمع شود، حاصل زوج می‌شود و مضرب ۲ است. پس عدد اول دیگری یافت نمی‌شود که حاصل $13p + 5$ اول شود.

سوال ۴۹

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

طبق قضیه تقسیم، $a = bq + r$ است که $0 \leq r < b$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$96 = bq + 6 \Rightarrow 90 = bq \Rightarrow q = \frac{90}{b} (b > 6)$$

یعنی b یکی از مقسوم‌علیه‌های ۹۰ می‌باشد که از ۶ بزرگ‌تر است.

$$b = 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90$$

پس برای b ، ۷ عدد طبیعی وجود دارد.

سوال ۵۰

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

مربع هر عدد صحیح فرد به صورت $x^2 = 8k + 1$ است:

$$a^2 - b^2 = (a^2 + b^2) (a^2 - b^2)$$

$$= (8k + 1 + 8k' + 1) (8k - 8k') = 2k_1 \times 8k_2$$

$$= 16q \quad (q \in \mathbb{Z})$$

سوال ۵۱

گزینه درست: null

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۸

متوسط

$$\left. \begin{aligned} 7 \mid 6k + 1 &\rightarrow 7^2 = 49 \mid (6k + 1)^2 \rightarrow 49 \mid 36k^2 + 12k + 1 \\ &\rightarrow 7 \times 7 \mid 7 \times (6k + 1) \rightarrow 49 \mid 42k + 7 \\ &\rightarrow 49 \mid 36k^2 + 54k + 7 \rightarrow a = 8 \end{aligned} \right\}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۵۲

$$a = 23q + 7q \Rightarrow 7q < 23 \Rightarrow q < \frac{23}{7} \Rightarrow q \leq 3$$

$$q_{\max} = 3 \Rightarrow a_{\max} = 30(3) = 90 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 9$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۵۳

(۱)

$$\left. \begin{array}{l} 2a + 3b \mid 2a + 3b \xrightarrow{\times 5} 2a + 3b \mid 10a + 15b \\ 2a + 3b \mid 5a + 7b \xrightarrow{\times 2} 2a + 3b \mid 10a + 14b \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 2a + 3b \mid b$$

(۲)

$$\left. \begin{array}{l} 2a + 3b \mid 5a + 7b \xrightarrow{\times 3} 2a + 3b \mid 15a + 21b \\ 2a + 3b \mid 2a + 3b \xrightarrow{\times 5} 2a + 3b \mid 10a + 15b \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 2a + 3b \mid a$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \min(m + n) = 1 + 1 = 2$$

متوسط

نهایی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۵۴

هر گاه p را بر ۶ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$p = 6k(۱), \quad p = 6k + 1(۲), \quad p = 6k + 2 = 2(3k + 1)(۳)$$

$$p = 6k + 3 = 3(2k + 1)(۴), \quad p = 6k + 4 = 2(3k + 2)(۵), \quad p = 6k + 5(۶)$$

p درحالات (۱)، (۳) و (۵) زوج و در (۴) بر ۳ بخش پذیر است که با اول بودن p تناقض دارد. بنابراین فقط درحالات (۲) یا (۶)، p می تواند عددی اول باشد که حکم اثبات می شود.

ساده

تشریحی قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۵۵

$$\left. \begin{array}{l} m = 37q + 15 \xrightarrow{\times 3} 3m = 3 \times 37q + 45 \\ n = 37q' + 29 \xrightarrow{\times 2} 2n = 2 \times 37q' + 58 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفریق}} 3m - 2n = 37(\underbrace{3q - 2q'}_{q''}) - 13$$

$$\Rightarrow 3m - 2n = 37q'' - 13$$

$$\Rightarrow 3m - 2n = 37(q'' - 1) + 24$$

باقی مانده برابر ۲۴ است.

ساده

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۵۶

$$\left. \begin{array}{l} x + 2 \mid x + 2 \xrightarrow{\times 3} x + 2 \mid 3x + 6 \\ x + 2 \mid 3x + 4 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} x + 2 \mid 2$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x + 2 = 2 \Rightarrow x = 0 & \text{غ ق} \\ x + 2 = -2 \Rightarrow x = -4 & \text{غ ق} \\ x + 2 = 1 \Rightarrow x = -1 & \text{غ ق} \\ x + 2 = -1 \Rightarrow x = -3 & \text{غ ق} \end{array} \right.$$

بنابراین هیچ نقطه‌ای با مختصات طبیعی روی نمودار این تابع وجود ندارد.

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۵۷

بر طبق الگوریتم تقسیم (۱) $b > ۳۷$ و $a = ۲۱b + ۳۷$ است.

$$(۲) \quad ۱۰۰ \leq ۲۱b + ۳۷ \leq ۹۹۹ \Rightarrow ۳ \leq b \leq ۴۵$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow ۳۸ \leq b \leq ۴۵$$

$$۲۱ = ۵k_1 + ۱, \quad ۳۷ = ۵k_2 + ۲ \Rightarrow a = (۵k_1 + ۱)b + ۵k_2 + ۲$$

$$\Rightarrow a = ۵k' + b + ۲$$

در نتیجه برای این که a مضرب ۵ باشد، لزوماً $b + ۲$ باید مضرب ۵ باشد، یعنی $b = ۵k - ۲$ است و داریم:

$$۳۸ \leq ۵k - ۲ \leq ۴۵ \Rightarrow ۴۰ \leq ۵k \leq ۴۷ \Rightarrow ۸ \leq k \leq ۹$$

بنابراین فقط دو جواب مضرب ۵ برای a ، وجود دارد.

متوسط

نهایی ۱۴۰۱

گزینه درست: null

سوال ۵۸

می‌دانیم $۱! \equiv ۰, ۲! \equiv ۲, ۳! \equiv ۶, ۴! \equiv ۹, ۵! \equiv ۰, \dots, ۱۵! \equiv ۰ \pmod{۲۰۰}$ پس داریم.

$$۱! + ۲! + ۳! + ۴! + ۵! + \dots + ۲۰۰! \equiv ۱ + ۲ + ۶ + ۲۴ + ۰ + ۰ + ۰ + \dots + ۰ \equiv ۳ \pmod{۲۰۰}$$

دشوار

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۵۹

$$۸y - x^2 - ۴x - ۱۱ = ۰ \Rightarrow y = \frac{x^2 + ۴x + ۱۱}{۸}$$

اگر x عددی زوج باشد، آنگاه x^2 و $۴x$ اعدادی زوج و در نتیجه $x^2 + ۴x + ۱۱$ عددی فرد است، پس بر ۸ بخش‌پذیر نمی‌باشد و در نتیجه به ازای هر x زوج، y عددی صحیح نیست.

اگر x عددی فرد باشد، آنگاه $x = ۲k + ۱$ و $x^2 = ۴k^2 + ۴k + ۱$ است $(k, k' \in \mathbb{Z})$ ، بنابراین داریم:

$$y = \frac{(۴k^2 + ۴k + ۱) + ۴(۲k + ۱) + ۱۱}{۸} = \frac{۴k^2 + ۸k + ۱۶}{۸} = k + k' + ۲$$

یعنی به ازای هر x فرد، y عددی صحیح است، پس بی‌شمار نقطه با مختصات صحیح بر روی این منحنی وجود دارد.

متوسط

تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۶۰

$$a = bq + r, \quad ۰ \leq r < b$$

حداکثر مقدار r برابر با $b-۱$ می‌باشد. پس:

$$\left. \begin{aligned} a &= \lambda r \\ r_{\max} &= b-1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda(b-1) = bq + b-1 \Rightarrow \lambda b - \lambda = bq + b-1$$

$$\Rightarrow \lambda b - bq = \lambda \Rightarrow b(\lambda - q) = \lambda = \lambda \times 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = \lambda \Rightarrow r = \lambda \\ \lambda - q = 1 \Rightarrow q = \lambda - 1 \end{cases} \Rightarrow a = \lambda r = \lambda \times \lambda = \lambda^2 = ۴ \times ۴ = ۱۶$$

ساده

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۶۱

ابتدا اعداد ۶۲۷، ۴۲۹ و ۱۵۴ را به عامل‌های اول آنها تجزیه می‌کنیم. داریم:

$$۶۲۷ = ۳ \times ۱۱ \times ۱۹, \quad ۴۲۹ = ۳ \times ۱۱ \times ۱۳, \quad ۱۵۴ = ۲ \times ۷ \times ۱۱$$

$$[(۶۲۷, ۴۲۹), ۱۵۴] = [(۳ \times ۱۱ \times ۱۹, ۳ \times ۱۱ \times ۱۳), ۱۵۴]$$

$$= [۳ \times ۱۱, ۲ \times ۷ \times ۱۱] = ۲ \times ۳ \times ۷ \times ۱۱ = ۴۶۲$$

تذکر: ب.م.م دو عدد برابر حاصل ضرب پایه‌های مشترک با توان کمتر و ک.م.م دو عدد برابر حاصل ضرب تمامی پایه‌ها شامل پایه‌های مشترک با توان بیشتر است.

ساده

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۶۲

اگر $r > q$ باشد، داریم:

$$a = ۳۷(r+۱) + r = ۳۸r + ۳۷ \xrightarrow{\max(r)=۳۶} a = ۱۴۰۵$$

اگر $q < r$ باشد، داریم:

$$a = ۳۷(r-۱) + r = ۳۸r - ۳۷ \xrightarrow{\max(r)=۳۶} a = ۱۳۳۱$$

بنابراین بیشترین مقدار a برابر ۱۴۰۵ و مجموع ارقام آن برابر ۱۰ است.

متوسط

تشریحی ۱۴۰۰

گزینه درست: null

سوال ۶۳

فرض کنید $d = (۳n + a, ۷n + ۳)$ باشد. در این صورت داریم:

$$\left. \begin{array}{l} d \mid ۳n + a \xrightarrow{\times ۷} d \mid ۲۱n + ۷a \\ d \mid ۷n + ۳ \xrightarrow{\times ۳} d \mid ۲۱n + ۹ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid ۷a - ۹$$

اگر به ازای تمامی مقادیر n ، $d=۱$ باشد، آنگاه لزوماً $۷a - ۹ = \pm ۱$ است و داریم:

$$\begin{cases} ۷a - ۹ = ۱ \Rightarrow a = \frac{۱۰}{۷} \notin N \\ ۷a - ۹ = -۱ \Rightarrow a = \frac{۸}{۷} \notin N \end{cases}$$

پس هیچ مقداری برای a وجود ندارد.

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۶۴

$$(n^۲ + n, ۳n - ۱) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid n^۲ + n \xrightarrow{\times ۳} d \mid ۳n^۲ + ۳n \\ d \mid ۳n - ۱ \xrightarrow{\times n} d \mid ۳n^۲ - n \end{cases} \Rightarrow d \mid ۴n$$

$$\begin{cases} d \mid ۴n \xrightarrow{\times ۳} d \mid ۱۲n \\ d \mid ۳n - ۱ \xrightarrow{\times ۴} d \mid ۱۲n - ۴ \end{cases} \Rightarrow d \mid ۴ \Rightarrow d = ۱ \quad یا \quad ۲ \quad یا \quad ۴$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۴

گزینه درست: null

سوال ۶۵

$$(n(n-1)(n^2+n+1), n(n-1)(n+1)) = 72$$

$$n(n-1)\underbrace{(n^2+n+1, n+1)}_1 = 72 \Rightarrow n(n-1) = 72 \Rightarrow n = 9$$

$$\Rightarrow n^2 + n = 81 + 9 = 90$$

$$(n^2 + n + 1, n + 1) = (n^2, n + 1) = (n^2 - (n^2 - 1), n + 1) \quad \text{نکته:}$$

$$= (1, n + 1) = 1$$

دشواری

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۶۶

$$a = bq + \lambda$$

$$r < b \Rightarrow \lambda < k + \epsilon \Rightarrow k > r \quad a + k = b(q+1) + r \Rightarrow bq + \lambda + k = bq + b + r \Rightarrow b = k + \epsilon$$

بنابراین k می‌تواند مقادیر ۳ تا ۹ را بپذیرد.

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۶۷

$$\left. \begin{array}{l} d|a - 3 \xrightarrow{\times(a-1)} d|a^2 - 3a + 3 \\ d|a^2 - 3a + 1 \end{array} \right\} \rightarrow d|2 \Rightarrow d = 1, 2$$

ساده

نهایی ۱۴۰۱

گزینه درست: null

سوال ۶۸

$$\begin{cases} a|5k+9 \\ a|8k+13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a|40k+72 \\ a|40k+65 \end{cases} \Rightarrow a|7 \Rightarrow a=1 \vee a=7$$