نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: -

تاریخ برگزاری:

مدت زمان آزمون: --

مرکز مشاوره قلم چی

---

① دشوار | تشریحی ۱۳۹۸

نقطه O درون مثلث قائم‌الزاویه ABC که $BC=۲AB$ و $\hat{A}=۹۰^{\circ}$ از هر سه ضلع آن به یک فاصله است. اندازه زاویه AOB چند برابر اندازه زاویه AOC است؟

بارم: ۱

② متوسط | تشریحی ۱۳۹۸

نقاط متمایز A،B و C روی یک خط قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از این سه نقطه به یک فاصله باشد؟

بارم: ۱

③ متوسط | تشریحی ۱۳۹۶

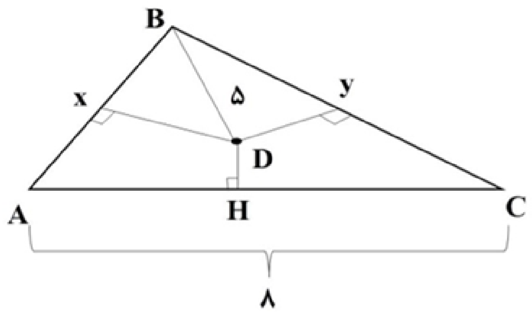
چند نقطه روی یک دایره وجود دارد که از دو خط متقاطع $d_۱$ و $d_۲$ به یک فاصله باشد؟

بارم: ۱

④ دشوار | تشریحی قلمچی ۱۳۹۸

در شکل زیر، نقطهٔ D درون مثلث ABC قرار دارد و Dx و Dy عمودمنصف های ضلع های AB و BC هستند. در این صورت اندازهٔ ارتفاع DH در مثلث ADC را به دست آورید. $(BD=۵, AC=۸)$

بارم: ۲



⑤ متوسط | سوالات پرتکرار ۱۳۹۹

روش رسم نیمساز یک زاویه را با رسم شکل توضیح دهید.

بارم: ۱

⑥ دشوار | تشریحی ۱۳۹۶

مربعی به ضلع ۴ مفروض است. اگر A، ناحیه‌ای درون مربع باشد که هر نقطه درون آن ناحیه، فاصله‌اش از تمام رأس‌های مربع بیشتر از یک باشد، بیشترین مساحت ناحیه A کدام است؟

بارم: ۱

⑦ متوسط | تشریحی ۱۳۹۶

همواره چند نقطه در صفحه می‌تواند وجود داشته باشد به‌طوری که فاصله آنها از نقاط متمایز A،B،C و D در همان صفحه به یک اندازه باشد؟

بارم: ۱

⑧ دشوار | تشریحی قلمچی ۱۳۹۹

نقطهٔ M روی عمودمنصف پاره خط AB قرار دارد. اگر فاصلهٔ A تا M برابر $۳x+۲$، فاصلهٔ B تا M برابر $۶x-۱$ و فاصلهٔ M تا پاره خط AB برابر $x+۳$ باشد، طول پاره خط AB را به دست آورید.

بارم: ۲

⑨ متوسط | تشریحی ۱۳۹۸

اگر l و d دو خط غیرموازی در یک صفحه باشند، حداکثر چند نقطه در صفحه وجود دارد که از این دو خط به فاصله یکسان و از نقطه تلاقی آن‌ها به فاصله یک واحد باشد؟

بارم: ۱

۱۰) تشریحی ۱۳۹۹ | متوسط

روش رسم نیمساز یک زاویه را با رسم شکل توضیح دهید.

بارم: ۱

۱۱) سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ | متوسط

ثابت کنید:

بارم: ۱

الف) هر نقطه روی عمود منصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.

ب) اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمود منصف آن پاره‌خط قرار دارد.

۱۲) تشریحی ۱۳۹۷ | دشوار

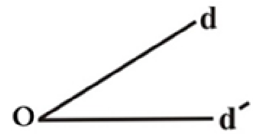
از بین شکل‌های مستطیل، لوزی، مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین، مربع و شش ضلعی منتظم، در چند شکل همواره نقطه تقاطع عمودمنصف‌های اضلاع و نقطه تقاطع نیم‌سازهای زاویه‌ها، بر هم منطبق است؟

بارم: ۱

۱۳) تشریحی قلمچی ۱۳۹۸ | متوسط

نقاطی از صفحه را مشخص کنید که از خط های d و d' و نقطهٔ O به یک فاصله باشند. (به صورت کامل توضیح دهید.)

بارم: ۲



۱۴) تشریحی قلمچی ۱۳۹۸ | دشوار

عمودمنصف های دو ضلع AC و BC و میانهٔ CM از مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ در نقطهٔ P یکدیگر را قطع می کنند. نوع مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و برابری ضلع ها را بررسی کنید.

بارم: ۱.۵

۱۵) تشریحی قلمچی ۱۳۹۶ | دشوار

نقطه A به فاصله ۸ سانتی متر از خط d قرار دارد:

بارم: ۱.۵

الف) مثلث متساوی‌الساقینی را رسم کنید که نقطه A یک رأس آن و طول ساق آن ۱۰ سانتی متر باشد و قاعده BC از این مثلث روی خط d باشد.

ب) اگر BH ارتفاع وارد بر ضلع AC باشد، اندازه این ارتفاع را پیدا کنید.

۱۶) تشریحی قلمچی ۱۳۹۷ | دشوار

نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ سانتی متر از خط d قرار دارد. مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ را طوری رسم کنید که مساحت آن ۱۲ سانتی متر مربع باشد و دو رأس آن روی خط d باشد.

بارم: ۲

۱۷) سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ | متوسط

طریقه‌ی رسم مثلثی به اضلاع ۶،۴ و ۸ را با رسم شکل توضیح دهید.

بارم: ۱

۱۸) سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ | متوسط

فرض کنید نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر از خط d باشد، روش رسم هر قسمت را توضیح دهید:

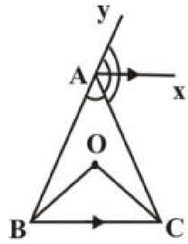
بارم: ۱

الف) مثلث متساوی‌الساقینی به رأس A که قاعده‌ی آن روی d واقع و طول ساق آن ۶ سانتی‌متر باشد.

ب) مثلث متساوی‌الساقینی به رأس A که قاعده‌ی آن روی d واقع و مساحت آن ۸ سانتی‌متر مربع باشد.

۱۹ تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۷ متوسط

در شکل زیر Ax نیم ساز زاویهٔ CAy و $Ax||BC$ است. اگر BO و CO نیم ساز زوایای B و C باشند و $\hat{B}=۷۵^\circ$ ، اندازه $B\hat{O}C$ را به دست آورید. (Ay در امتداد BA است.) بارم: ۲



۲۰ سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ متوسط

طریقه‌ی رسم عمود منصف یک پاره‌خط را توضیح دهید. بارم: ۱

۲۱ سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ متوسط

نقطه‌ی A بیرون خط d، به فاصله‌ی ۱۰ واحد از آن قرار دارد. چند نقطه می‌توان در صفحه یافت که از A به فاصله‌ی ۶ و از d به فاصله‌ی ۸ باشند؟ (با رسم شکل) بارم: ۱

۲۲ تشریحی ۱۳۹۹ متوسط

طریقه‌ی رسم مثلثی به اضلاع ۶،۴ و ۸ را با رسم شکل توضیح دهید. بارم: ۱

۲۳ تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

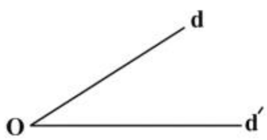
با معلوم بودن دو ضلع $AB=۳$ و $BC=۵$ و زاویه $\widehat{C}=۳۰^\circ$، چند مثلث غیرهم‌نهشت می‌توان رسم کرد؟ بارم: ۱

۲۴ تشریحی ۱۳۹۹ متوسط

طریقه‌ی رسم عمود منصف یک پاره‌خط را توضیح دهید. بارم: ۱

۲۵ تشریحی ۱۳۹۷ متوسط

چند نقطه (به غیر از O) در صفحه وجود دارد که از خط‌های d و d' و نقطه O به یک فاصله باشد؟ بارم: ۱



۲۶ تشریحی ۱۳۹۷ متوسط

نقطه A به فاصله ۴ سانتیمتر از خط d قرار دارد. اگر بخواهیم نقاط B و C را روی خط d چنان انتخاب کنیم که مثلث ABC متساوی‌الساقین بوده و مساحت آن ۱۲ سانتی‌متر مربع باشد، باید دایره‌ای به مرکز A و شعاعی با کدام طول بزنیم تا نقاط B و C را روی خط بوجود آورد؟ بارم: ۱

۲۷ تشریحی ۱۳۹۷ دشوار

در مثلث قائم‌الزاویه $ABC(A=۹۰^\circ)$، نیمساز زاویه B، ضلع AC را در نقطه D قطع می‌کند. اگر $AD=\frac{۸}{۳}$ و $\widehat{B}=۲\widehat{C}$ باشد، مساحت مثلث DBC کدام است؟ بارم: ۱

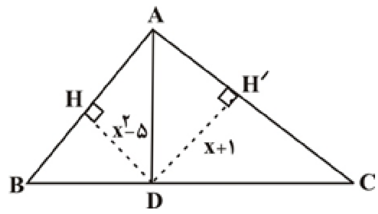
۲۸ تشریحی ۱۳۹۶ متوسط

اگر در یک مثلث، مجموع دو زاویه برابر با زاویه سوم باشد، آنگاه محل تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع این مثلث کجا قرار دارد؟ بارم: ۱

(۲۹) تشریحی قلمچی ۱۳۹۷ | دشوار

در شکل زیر اگر AB=x+۲، AC=x+۳ و AD نیمساز زاویه A باشد، اندازه پاره خط AB و AC را به دست آورید.

بارم: ۲



(۳۰) تشریحی ۱۳۹۹ | متوسط

نقطه M روی عمودمنصف پاره‌خط AB است و فاصله آن تا A برابر $4x-3$ و تا B برابر x^2-15 است. مقدار x کدام است؟

بارم: ۱

(۳۱) تشریحی ۱۳۹۶ | متوسط

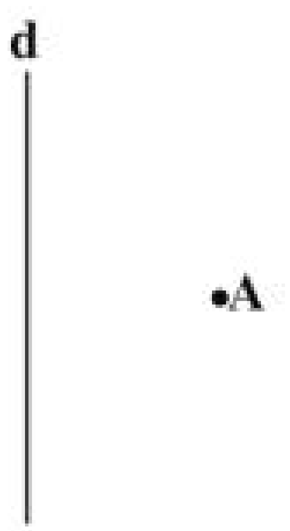
چند مثلث متمایز با طول اضلاع $BC=6$، $AB=5$ و به مساحت ۲۱ وجود دارد؟

بارم: ۱

(۳۲) تشریحی ۱۳۹۷ | متوسط

با استفاده از پرگار کمانی به شعاع $3\sqrt{2}cm$ و به مرکز نقطه A که در فاصله ۳ سانتی‌متری از خط d قرار دارد، رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط B و C قطع کند. مثلث ABC . . . . . . و مساحت آن . . . . . . است.

بارم: ۱



(۳۳) تشریحی ۱۳۹۹ | متوسط

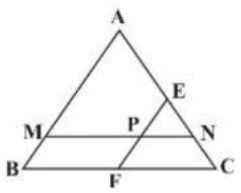
صورت قضیه‌ی تالس را بیان نموده و با رسم شکل اثبات کنید.

بارم: ۱

(۳۴) تشریحی قلمچی ۱۳۹۸ | متوسط

در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم: $BC=8$ و $AC=6$، خط MN به موازات BC و به طول ۶ رسم شده است و خط EF به موازات AB از وسط MN گذشته است. طول EC را به دست آورید.

بارم: ۲



(۳۵) سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ | متوسط

در معادله‌ی $2x^2-9x+m=0$ یکی از ریشه‌ها ۲ برابر دیگری است. m را بیابید.

بارم: ۱

۳۶) تشریحی ۱۳۹۹ متوسط

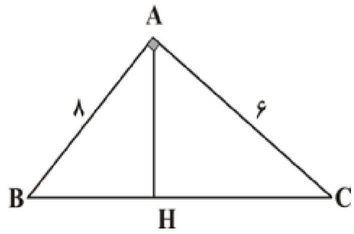
با توجه به تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، اگر $a^3-c^3=۶۴$ و $b^3-d^3=۲۷$ باشد، آنگاه b^2 چند برابر a^2 است؟

بارم: ۱

۳۷) نهایی ۱۴۰۰ متوسط

در مثلث قائم الزاویه زیر داریم $\hat{A}=۹۰^\circ$ و با فرض آنکه $AC=۶$ و $AB=۸$ باشد اندازه BH , CH را به دست آورید.

بارم: ۱



۳۸) تشریحی ۱۳۹۹ دشوار

اگر $\frac{c}{۵}=\frac{b+a}{۲}=\frac{۲a}{۳}$ باشد، آنگاه $\frac{a+c}{b}$ کدام است؟

بارم: ۱

۳۹) تشریحی ۱۳۹۹ متوسط

در معادله‌ی $۲x^2-۹x+m=۰$ یکی از ریشه‌ها ۲ برابر دیگری است. m را بیابید.

بارم: ۱

۴۰) نهایی ۱۴۰۰ متوسط

الف) عکس قضیه (اگر در یک چهار ضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند آنگاه آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است) را بنویسید.

بارم: ۱

ب) با استفاده از برهان خلف ثابت کنید که اگر $n\in N$ و n^2 عددی فرد باشد آنگاه n نیز عددی فرد است.

۴۱) سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ متوسط

صورت قضیه‌ی تالس را بیان نموده و با رسم شکل اثبات کنید.

بارم: ۱

۴۲) تشریحی ۱۳۹۹ متوسط

با استفاده از برهان خلف ثابت کنید:

بارم: ۱

اگر $n\in N$ و n^2 عددی فرد باشد، آنگاه n نیز عددی فرد است.

۴۳) سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ متوسط

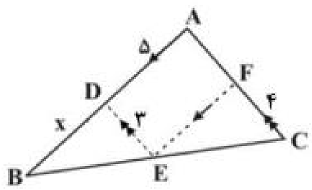
عکس قضیه‌ی فیثاغورس را نوشته و آن را ثابت کنید.

بارم: ۱

۴۴) تشریحی قلمچی ۱۳۹۸ متوسط

در شکل زیر $DE||AC$ و $EF||AB$ است، اندازه BD را به دست آورید.

بارم: ۲.۵



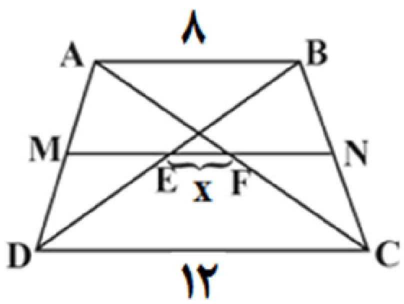
۴۵) تشریحی ۱۳۹۹ متوسط

عکس قضیه‌ی فیثاغورس را نوشته و آن را ثابت کنید.

بارم: ۱

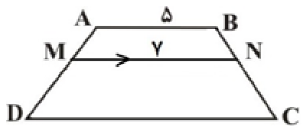
۴۶ — تشریحی قلمچی ۱۳۹۷ — متوسط — بارم: ۲

با توجه به شکل زیر، M و N وسط دو ساق ذوزنقهٔ ABCD است. مقدار x را به دست آورید.



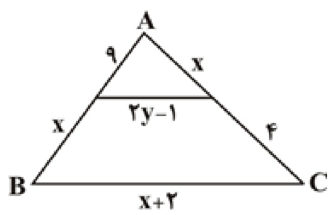
۴۷ — تشریحی قلمچی ۱۳۹۹ — متوسط — بارم: ۲

در ذوزنقه ABCD، پاره‌خط MN موازی قاعده ها رسم شده و $\frac{AM}{MD} = \frac{۱}{۳}$ است. اندازه DC را به دست آورید.



۴۸ — نهایی ۱۴۰۰ — متوسط — بارم: ۱

در شکل مقابل $DE || BC$ مقدار x و y را به دست آورید.

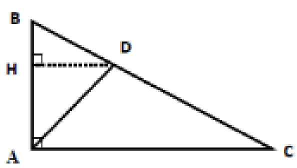


۴۹ — سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ — متوسط — بارم: ۱

فرض کنید AD نیمساز زاویه‌ی A در مثلث ABC باشد. اگر $BD \neq DC$ ثابت کنید $AB \neq AC$.

۵۰ — تشریحی قلمچی ۱۳۹۶ — متوسط — بارم: ۱.۵

مساحت مثلث قائم‌الزاویه شکل زیر، ۶ سانتی متر مربع و مجموع دو ضلع زاویهٔ قائمهٔ ۷ سانتی متر است.

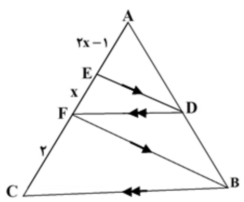


الف) به کمک S و P و تشکیل معادلهٔ درجه دوم، طول اضلاع زاویهٔ قائمهٔ این مثلث را پیدا کنید.

ب) اگر D محل برخورد نیمساز زاویه A با ضلع BC باشد طول DH را پیدا کنید.

۵۱ — تشریحی قلمچی ۱۳۹۸ — متوسط — بارم: ۱.۵

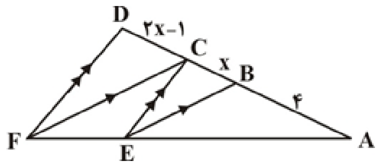
در شکل زیر، مقدار x را به دست آورید.



۵۲) تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۷ — متوسط

در شکل زیر اندازه پاره‌خط AD را به دست آورید. $(BE||CF\ ,\ EC||FD)$

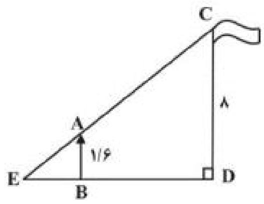
بارم: ۲



۵۳) تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۹ — متوسط

در شکل زیر، پاره خط AB شخصی است که در فاصلهٔ ۴ متری از پای پرچمی به ارتفاع ۸ متر ایستاده است. اگر اندازهٔ قد شخص ۱/۶ متر باشد، طول کابل EC چند متر است؟

بارم: ۲



۵۴) سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ — متوسط

قضیه‌ی تالس را به صورت یک قضیه‌ی دو شرطی بنویسید.

بارم: ۱

۵۵) سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ — متوسط

با استفاده از برهان خلف ثابت کنید:

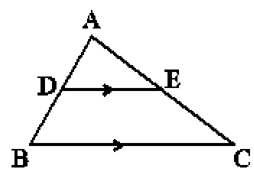
بارم: ۱

اگر $n \in N$ و n^2 عددی فرد باشد، آنگاه n نیز عددی فرد است.

۵۶) سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ — متوسط

مطابق شکل، در مثلث ABC، $DE \parallel BC$ ثابت کنید $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$.

بارم: ۱



۵۷) تشریحی ۱۳۹۹ — متوسط

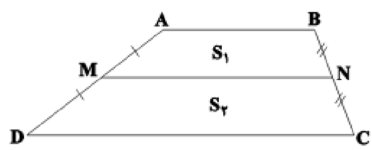
قضیه‌ی تالس را به صورت یک قضیه‌ی دو شرطی بنویسید.

بارم: ۱

۵۸) تشریحی ۱۴۰۰ — متوسط

در ذوزنقه زیر، M و N به‌ترتیب وسط اضلاع AD و BC هستند. در این ذوزنقه S_1 مساحت $ABNM$ و S_2 مساحت $MNCD$ هستند. اگر نسبت $\frac{S_1}{S_2}$ برابر $\frac{5}{7}$ باشد، $\frac{AB}{DC}$ کدام است؟

بارم: ۱



۵۹ سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ — متوسط

با استفاده از خواص تناسب، از هر یک از تساوی‌های زیر، مقدار عددی $\frac{a}{b}$ را به‌دست آورید. بارم: ۱

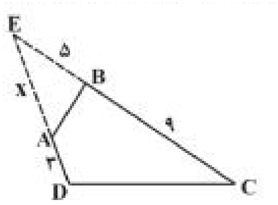
الف) $\frac{b}{b+۷}=\frac{a}{a+۵}$ ب) $\frac{۳b+۷}{۷+۲b}=\frac{۳a+۱۰}{۱۰+۲a}$

۶۰ تشریحی ۱۳۹۹ — متوسط

نسبت تشابه دو مثلث متشابه برابر $\frac{۳}{۷}$ و محیط مثلث بزرگ‌تر ۲۰ واحد بیشتر از محیط مثلث کوچک‌تر است. مجموع محیط‌های دو مثلث چند واحد است؟ بارم: ۱

۶۱ تشریحی ۱۳۹۷ — دشوار

در چهار ضلعی ABCD زوایای روبه‌رو مکمل هم هستند و امتداد اضلاع AD و BC در E متقاطع‌اند. مساحت مثلث CDE چند برابر مساحت چهارضلعی است؟ بارم: ۱



۶۲ تشریحی ۱۳۹۷ — دشوار

کوچکترین ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای که اندازه ارتفاع و میانه وارد بر وتر در آن به ترتیب $۲\sqrt{۲}$ و ۳ واحد می‌باشد، کدام است؟ بارم: ۱

۶۳ تشریحی ۱۳۹۶ — متوسط

مثلثی با اضلاع ۳، ۴ و a با مثلث دیگری با اضلاع ۵، b و ۶ متشابه است. برای زوج مرتب (a و b) چند جواب مختلف وجود دارد؟ بارم: ۱

۶۴ تشریحی ۱۳۹۶ — دشوار

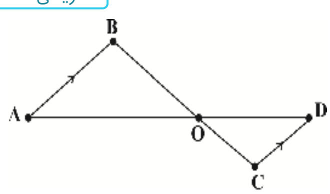
در مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\widehat{A}=۹۰^\circ)$، ارتفاع AH رسم شده است. اگر مساحت مثلث ABC برابر مساحت مثلث ABH ۱/۸ باشد نسبت فواصل پای ارتفاع وارد بر وتر از دو ضلع قائمه مثلث ABC چقدر است؟ بارم: ۱

۶۵ تشریحی ۱۳۹۶ — متوسط

نسبت مساحت دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ به صورت $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\frac{۹}{۱۶}$ است. اگر بزرگ‌ترین ضلع مثلث ABC، ۷ واحد و نسبت کوچک‌ترین ضلع به بزرگ‌ترین ضلع در مثلث $A'B'C'$، $\frac{۲}{۳}$ باشد، اندازه ضلع کوچک‌تر در مثلث $A'B'C'$ چند واحد است؟ بارم: ۱

۶۶ تشریحی ۱۳۹۷ — متوسط

نسبت مساحت مثلث AOB به COD، برابر $\frac{۹}{۴}$ است. اگر $AD=۱۵$ باشد، OD چه‌قدر است؟ بارم: ۱



۶۷ تشریحی ۱۳۹۷ — متوسط

کوچکترین ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای که اندازه ارتفاع و میانه وارد بر وتر در آن به ترتیب $۲\sqrt{۲}$ و ۳ واحد می‌باشد، کدام است؟ بارم: ۱

۶۸ تشریحی ۱۳۹۹ — متوسط

نقطه O در مثلث قائم‌الزاویه ABC به نحوی قرار دارد که $OA=OB=OC=۳$ است. اگر مساحت این مثلث ۹ باشد، اندازه محیط مثلث ABC چند است؟ بارم: ۱

۶۹ تشریحی ۱۳۹۶ دشوار

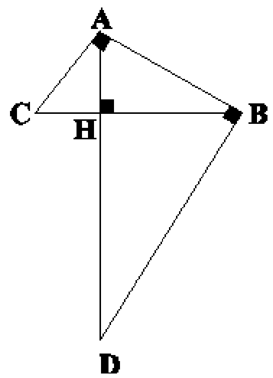
در دو مثلث قائم‌الزاویه متشابه، وتر یکی ۴ برابر وتر دیگری است. اگر مساحت مثلث کوچکتر برابر ۵ باشد، واسطه هندسی مثبت اضلاع قائمه در مثلث بزرگتر کدام است؟ بارم: ۱

۷۰ تشریحی ۱۳۹۶ دشوار

در یک مثلث قائم‌الزاویه اندازه وتر و ارتفاع وارد بر آن به ترتیب از راست به چپ ۴ و ۱ سانتی‌متر است. طول پاره‌خط بزرگتری که ارتفاع روی وتر جدا می‌کند، چند سانتی‌متر است؟ بارم: ۱

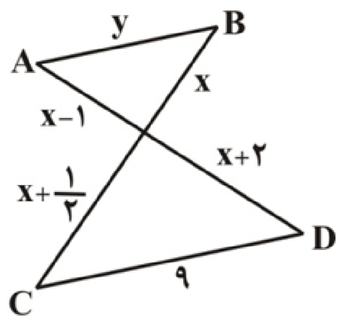
۷۱ تشریحی ۱۳۹۹ متوسط

با توجه به شکل زیر، اگر $BC = \frac{5}{4}AB = 5$ باشد، آنگاه طول پاره‌خط BD کدام است؟ بارم: ۱



۷۲ تشریحی قلمچی ۱۳۹۸ متوسط

در شکل زیر، اگر دو مثلث OAB و OCD متشابه باشد، مقدار y را حساب کنید. (AB و CD موازی نیستند.) بارم: ۲



۷۳ تشریحی ۱۳۹۷ متوسط

در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول ارتفاع وارد بر وتر ۲۴ و نسبت دو پاره‌خطی که ارتفاع، بر روی وتر ایجاد کرده است، $\frac{9}{16}$ می‌باشد. طول ضلع کوچک این مثلث کدام است؟ بارم: ۱

۷۴ تشریحی ۱۳۹۸ متوسط

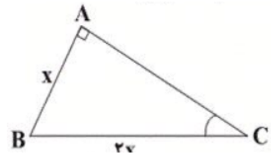
در یک مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن‌را به دو پاره‌خط تقسیم می‌کند که یکی ۲ واحد از دیگری بزرگ‌تر است. اگر ارتفاع وارد بر وتر $4\sqrt{3}$ واحد باشد، مساحت مثلث کدام است؟ بارم: ۱

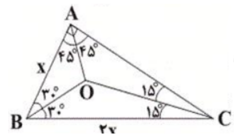
۷۵ تشریحی ۱۳۹۹ متوسط

در یک مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. اگر مساحت مثلث کوچکتر $\frac{1}{5}$ مساحت مثلث اصلی باشد، نسبت فواصل پای ارتفاع از دو ضلع قائم آن کدام است؟ بارم: ۱

سوال ۱ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | دشوار

ابتدا توجه کنید که در شکل زیر داریم:





$$\sin\hat{C}=\frac{AB}{BC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\hat{C}=۳۰^\circ\Rightarrow\hat{B}=۶۰^\circ$$

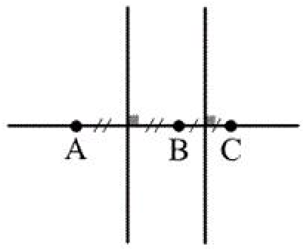
نقطه‌ای که از سه ضلع مثلث به یک فاصله است، نقطه همرسی نیمسازهای داخلی آن است، پس در شکل زیر OA، OB و OC به ترتیب نیمسازهای زاویه‌های A، B و C هستند. در دو مثلث OAB و OAC مجموع زاویه‌های داخلی را برابر ۱۸۰° قرار می‌دهیم تا $A\hat{O}B$ و $A\hat{O}C$ را به دست آوریم:

$$۴۵^\circ+۳۰^\circ+A\hat{O}B=۱۸۰^\circ\Rightarrow A\hat{O}B=۱۰۵^\circ$$

$$۴۵^\circ+۱۵^\circ+A\hat{O}C=۱۸۰^\circ\Rightarrow A\hat{O}C=۱۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow\frac{A\hat{O}B}{A\hat{O}C}=\frac{۱۰۵^\circ}{۱۲۰^\circ}=\frac{۷}{۸}=۰/۸۷۵$$

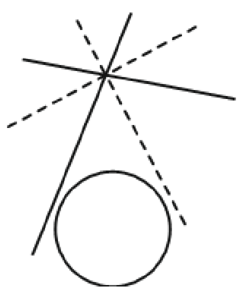
سوال ۲ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | متوسط



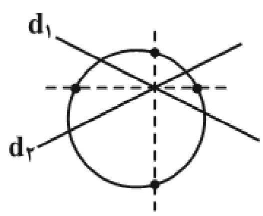
نقطه‌ای که از سه نقطه A، B و C به یک فاصله است، محل برخورد عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB و BC است که چون این دو خط موازی‌اند، چنین نقطه‌ای وجود ندارد.

سوال ۳ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | متوسط

نقاطی که روی نیمساز یک زاویه قرار دارند، از دو ضلع آن به یک فاصله‌اند. لذا با توجه به وضعیت دو خط متقاطع با دایره، نیمسازهای چهار زاویه تشکیل شده با دایره‌ی مفروض حداکثر در ۴ نقطه متقاطع هستند.



هیچ نقطه‌ی تقاطعی وجود ندارد.



۴ نقطه‌ی تقاطع وجود دارد.

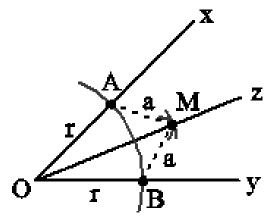
سوال ۴ | گزینه درست: null | تشریحی قلمچی ۱۳۹۸ | دشوار

نقطهٔ D روی عمودمنصف ضلع BC قرار دارد بنابراین فاصلهٔ آن از نقاط B و C به یک اندازه است. و از طرفی چون نقطهٔ D روی عمودمنصف خط AB نیز قرار دارد، فاصلهٔ آن از دو نقطهٔ A و B نیز به یک اندازه است. بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ D از نقاط A و C به یک اندازه است و DH عمودمنصف AC است.

پس $AH = ۴$ و از آن جا که فاصلهٔ هر نقطه روی عمودمنصف از دو سر پاره خط به یک اندازه است، پس AD برابر ۵ است.

$$DH^۲ = AD^۲ - AH^۲ \Rightarrow DH^۲ = ۵^۲ - ۴^۲ = ۲۵ - ۱۶ = ۹ \Rightarrow DH = ۳$$

سوال ۵ | گزینه درست: null | سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ | متوسط

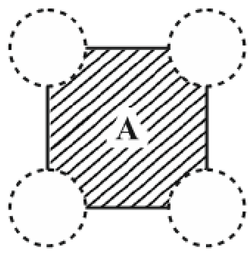


فرض کنید می‌خواهیم نیمساز زاویه‌ی xOy را رسم کنیم. ابتدا به مرکز O، کمان دلخواهی رسم می‌کنیم تا Ox و Oy را به ترتیب در نقاط A و B قطع کند، سپس دهانه‌ی پرگار را به مقداری بیشتر از نصف طول AB باز کرده و یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B، کمان‌هایی با شعاع برابر رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطه‌ی M قطع کنند. از نقطه‌ی O به M وصل کرده و OM را از سمت M ادامه می‌دهیم تا نیم‌خط Oz حاصل شود.

از آنجا که دو مثلث OAM و OBM به حالت تساوی سه ضلع همنهشت هستند، نیم‌خط Oz نیمساز زاویه‌ی xOy است.

سوال ۶ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

۴ دایره به مرکز رئوس مربع و به شعاع ۱ رسم می‌کنیم. ناحیه A، ناحیه هاشورخورده مطابق شکل است که برای محاسبه مساحت آن کافی است از مساحت مربع، ۴ تا مساحت ربع دایره (یا مساحت ۱ دایره کامل) را حذف کنیم:



(مساحت ربع دایره × ۴) - مساحت مربع = مساحت ناحیه A

$$= ۱۶ - ۴ \times \frac{\pi \times ۱^۲}{۴} = ۱۶ - \pi$$

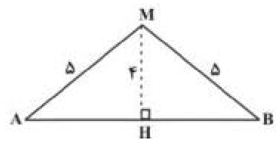
سوال ۷ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | متوسط

جواب مسأله، نقاط حاصل از برخورد عمودمنصف پاره‌خط‌های AB، CD و BC (یا AD) است. این عمودمنصف‌ها ممکن است همدیگر را در یک نقطه قطع نکنند (همرس نباشند.) یا در یک نقطه قطع کنند (همرس باشند.) بنابراین مسأله می‌تواند صفر یا یک جواب داشته باشد.

سوال ۸ | گزینه درست: null | تشریحی قلمچی ۱۳۹۹ | دشوار

چون M روی عمودمنصف AB قرار دارد، پس:

$AM = BM \Rightarrow ۳x + ۲ = ۶x - ۱ \Rightarrow ۳x = ۳ \Rightarrow x = ۱$



فاصلهٔ M تا پاره خط AB $= x + ۳ \xrightarrow{x=۱} MH = ۴$

رابطهٔ فیثاغورس : $BH^۲ = BM^۲ - MH^۲$

$\Rightarrow BH^۲ = ۲۵ - ۱۶ = ۹$

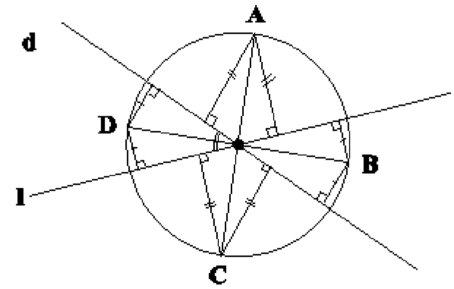
$\Rightarrow BH = ۳$

$\Rightarrow AB = ۶$

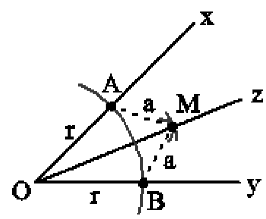
سوال ۹ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | متوسط

همه نقاطی که از دو خط متقاطع l و d فاصله یکسان دارند، روی نیمسازهای زاویه‌های بین این دو خط قرار دارند. همچنین تمام نقاطی که از نقطه تلاقی l و d به فاصله یک واحد قرار دارند روی دایره‌ای به مرکز نقطه تلاقی دو خط (O) و شعاع یک واحد قرار خواهند گرفت.

پس مطابق شکل حداکثر ۴ نقطه A، B، C و D، همزمان این دو ویژگی را خواهند داشت.



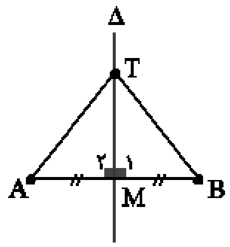
سوال ۱۰ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۹ | متوسط



فرض کنید می‌خواهیم نیمساز زاویه‌ی xOy را رسم کنیم. ابتدا به مرکز O، کمان دلخواهی رسم می‌کنیم تا Ox و Oy را به ترتیب در نقاط A و B قطع کند، سپس دهانه‌ی پرگار را به مقداری بیشتر از نصف طول AB باز کرده و یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B، کمان‌هایی با شعاع برابر رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطه‌ی M قطع کنند. از نقطه‌ی O به M وصل کرده و OM را از سمت M ادامه می‌دهیم تا نیم‌خط Oz حاصل شود.

از آنجا که دو مثلث OAM و OBM به حالت تساوی سه ضلع همنهشت هستند، نیم‌خط Oz نیمساز زاویه‌ی xOy است.

سوال ۱۱ | گزینه درست: null | سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ | متوسط

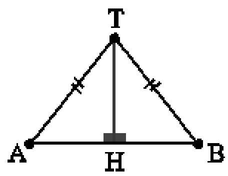


الف) مطابق شکل، فرض می‌کنیم خط Δ عمود منصف پاره‌خط AB است. نقطه‌ی دلخواه رارويT۴\BوA به T درنظرگرفته،از $Delta وصل می‌کنیم، داریم:

$$\begin{cases} \widehat{M}_۱ = \widehat{M}_۲ = ۹۰^\circ \\ AM = BM \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} T\overset{\triangle}{A}M \cong T\overset{\triangle}{B}M \\ TM\text{مشترک} \end{cases}$$

$$\Rightarrow TA = TB$$

ب) مطابق شکل فرض کنید $TA = TB$، اگر از T به AB عمود کنیم، داریم



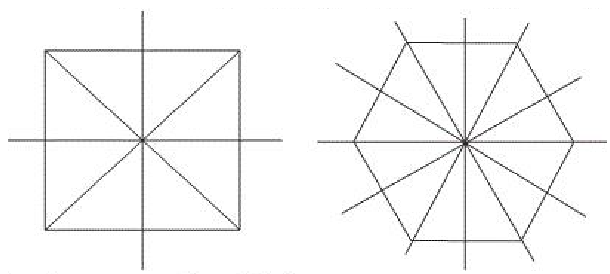
$$\begin{cases} TA = TB \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائمه}} T\overset{\triangle}{A}H \cong T\overset{\triangle}{B}H \\ TH\text{مشترک} \end{cases}$$

$$\Rightarrow AH = BH$$

تساوی اخیر نشان می‌دهد که H وسط AB است، در نتیجه نقطه‌ی T روی عمود منصف AB واقع است.

سوال ۱۲ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۷ | دشوار

با توجه به شکل‌ها، نقطه تقاطع نیمسازهای زوایا و عمودمنصف‌های اضلاع در شش ضلعی منتظم و مربع بر هم منطبق هستند.



سوال ۱۳ | گزینه درست: null | تشریحی قلمچی ۱۳۹۸ | متوسط

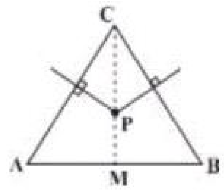
در صفحه تعداد نقاطی که از خطوط d و d' به یک فاصله باشند بی-شمار است، چون همهٔ نقاط روی نیمساز زاویهٔ O این ویژگی را دارند ، نقاطی که از نقطهٔ O نیز به یک فاصله باشند، روی دایره ای به مرکز O و به شعاع های متفاوت قرار دارند.

اما طول شعاع دایره به مرکز O و نقطهٔ M روی نیم ساز که دایره را قطع کرده، همواره بیش‌تر از فاصله M تا دو خط d و d' است بنابراین هیچ نقطه ای در صفحه وجود ندارد که از دو خط d و d' و نقطهٔ O به یک فاصله باشد.

سوال ۱۴ | گزینه درست: null | تشریحی قلمچی ۱۳۹۸ | دشوار

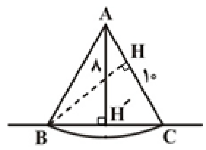
در هر مثلث، سه عمودمنصف همرسند ،پس CM علاوه بر اینکه میانهٔ AB است، ارتفاع وارد بر آن و عمودمنصف نیز هست.

در مثلث متساوی الساقین ارتفاع با میانه برابر است. پس $CA = CB$



سوال ۱۵ | گزینه درست: null | تشریحی قلمچی ۱۳۹۶ | دشوار

الف) دهانه پرگار را به اندازه ی ۱۰ سانتی متر باز کرده و به مرکز A دایره ای رسم می کنیم. این کمان خط d را در نقاط B و C قطع می کند $\overset{\Delta}{ABC}$ جواب است.

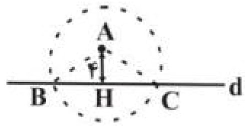


ب) $H'C = \sqrt{۱۰^۲ - ۸^۲} = ۶ \rightarrow BC = ۲H'C = ۱۲$

$$\frac{AH' \times BC}{۲} = \frac{BH \times AC}{۲} \rightarrow BH = \frac{۸ \times ۱۲}{۱۰} = ۹/۶$$

سوال ۱۶ | گزینه درست: null | تشریحی قلمچی ۱۳۹۷ | دشوار

برای رسم مثلث متساوی‌الساقین ABC باید دایره ای به مرکز A رسم کنیم و دو رأس دیگر مثلث را که از برخورد دایره با خط d به دست می آید به دست آوریم. توجه به شکل زیر داریم:



$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = (\frac{۱}{۲})(BC)(AH)$

$\rightarrow ۱۲ = \frac{۱}{۲}(BC)\ (۴)$

$\rightarrow BC = ۶\,cm$

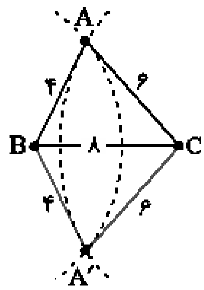
$\rightarrow BH = HC = ۳\ cm$

$\overset{\Delta}{AHC} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} AC^۲ = AH^۲ + HC^۲$

$\rightarrow AC^۲ = ۴^۲ + (۳)^۲ = ۲۵ = ۵^۲ \rightarrow AC = ۵\ cm$

بنابراین دایره ای به مرکز A و شعاع ۵ سانتی متر رسم می کنیم تا نقاط B و C به دست آید. از به هم وصل کردن نقاط A و B و C مثلث موردنظر به دست می آید.

سوال ۱۷ | گزینه درست: null | سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ | متوسط

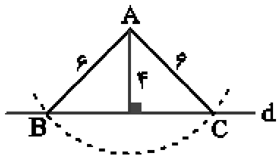


فرض کنید می‌خواهیم مثلث ABCرا رسم کنیم که در آن $AB = ۴$، $AC = ۶$ و $BC = ۸$ است. پاره‌خط $BC = ۸$ را رسم می‌کنیم.

از آنجا که $AB = ۴$، رأس A روی دایره‌ای به مرکز Bو شعاع ۴ واحد قرار دارد، پس به مرکز Bو شعاع ۴ واحد، کمانی رسم می‌کنیم. همچنین از آنجا که $AC = ۶$، رأس A روی دایره‌ای به مرکز Cو شعاع ۶ واحد قرار دارد؛ پس به مرکز Cو شعاع ۶ واحد کمانی رسم می‌کنیم.

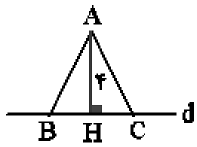
محل برخورد این دو کمان، رأس A را مشخص می‌کند، یعنی در شکل بالا، دو مثلث همنهشت ABC و $A'BC$، مثلث‌هایی به طول ضلع‌های ۴، ۶ و ۸ واحد هستند.

سوال ۱۸ | گزینه درست: null | سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ | متوسط



الف) اگر طول ساق مثلث ۶ واحد باشد، یعنی $AB = AC = ۶$ پس B و C روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۶ واقع‌اند، بنابراین کافیست به مرکز A و شعاع ۶ کمانی رسم کنیم. نقاط برخورد این کمان با خط d، رأس‌های B و C را مشخص می‌کند.

ب) با توجه به شکل، داریم:



$$S(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{۱}{۲} AH \times BC$$

$$\Rightarrow ۸ = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times BC$$

$$\Rightarrow BC = ۴ \Rightarrow BH = CH = ۲$$

از نقطه‌ی A خطی عمود بر d رسم می‌کنیم تا نقطه‌ی H به‌دست آید. سپس به مرکز H و به شعاع ۲ کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطه قطع کند. این نقاط، رأس‌های B و C هستند.

سوال ۱۹ | گزینه درست: null | تشریحی قلمچی ۱۳۹۷ | متوسط

$C\hat{A}y$ نیم ساز $Ax \rightarrow y\hat{A}x = x\hat{A}C$

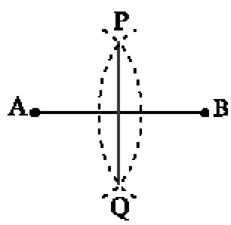
از طرفی زاویهٔ خارجی مثلث برابر است با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیر مجاورش، پس:

$$\begin{cases} \hat{B} + \hat{C} = y\hat{A}C = ۲x\hat{A}C \\ Ax \| BC\,,\ AC \text{مورب} \rightarrow \hat{C} = x\hat{A}C \end{cases} \rightarrow \hat{B} = \hat{C}$$

$$\hat{O} = ۱۸۰^\circ - (\frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲}) = ۱۸۰^\circ - ۷۵^\circ = ۱۰۵^\circ$$

سوال ۲۰ | گزینه درست: null | سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ | متوسط

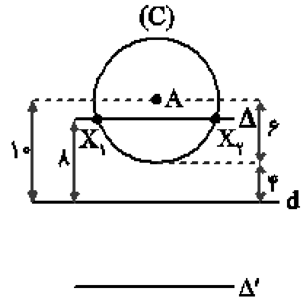
فرض کنید می‌خواهیم عمود منصف پاره‌خط AB را رسم کنیم.
به مرکزهای A و B با شعاعی یکسان، دو کمان را طوری رسم می‌کنیم که با هم متقاطع باشند (اگر شعاع بیش از نصف طول AB باشد، این دو کمان متقاطع خواهند بود).



نقاط برخورد این دو کمان (P و Q)، از A و B به یک فاصله هستند، پس روی عمود منصف AB قرار دارند و از آنجا که هر خط با معلوم بودن دو نقطه از آن و وصل کردن این دو نقطه به هم قابل رسم است، می‌توان گفت خط گذرنده از P و Q عمود منصف AB است.

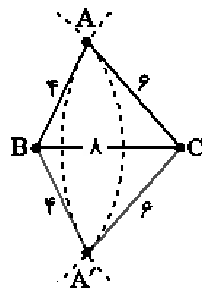
سوال ۲۱ | گزینه درست: null | سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ | متوسط

نقاطی که از A به فاصله‌ی ۶ واحد هستند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۶ قرار دارند (دایره‌ی C در شکل زیر) و نقاطی که از خط d به فاصله‌ی ۸ واحد هستند، روی دو خط به موازات d و به فاصله‌ی ۸ واحد از آن قرار دارند (Δ و Δ' در شکل زیر).



همانطور که در شکل ملاحظه می‌کنید، دایره‌ی C و خط Δ در دو نقطه (X_1 و X_2) متقاطعند که این دو نقطه جواب سؤال هستند.

سوال ۲۲ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۹ | متوسط



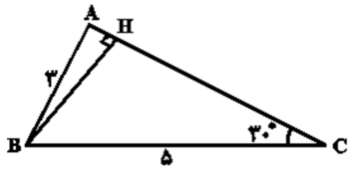
فرض کنید می‌خواهیم مثلث ABC را رسم کنیم که در آن $AB = ۴$، $AC = ۶$ و $BC = ۸$ است. پاره‌خط $BC = ۸$ را رسم می‌کنیم.

از آنجا که $AB = ۴$، رأس A روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۴ واحد قرار دارد، پس به مرکز B و شعاع ۴ واحد، کمانی رسم می‌کنیم. همچنین از آنجا که $AC = ۶$، رأس A روی دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۶ واحد قرار دارد؛ پس به مرکز C و شعاع ۶ واحد کمانی رسم می‌کنیم.

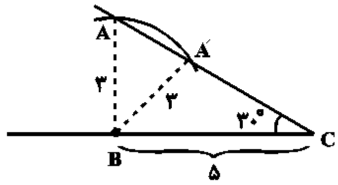
محل برخورد این دو کمان، رأس A را مشخص می‌کند، یعنی در شکل بالا، دو مثلث همنهشت ABC و $A'BC$، مثلث‌هایی به طول ضلع‌های ۴، ۶ و ۸ واحد هستند.

سوال ۲۳ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | دشوار

مثلث ABC را با معلومات داده شده رسم می‌کنیم. در مثلث BHC، BH روبه‌رو به زاویه ۳۰ درجه، نصف وتر است. پس $BH = ۲/۵$ است.



زاویه $\widehat{C}$ را به اندازه ۳۰° رسم می‌کنیم، و نقطه B را به فاصله ۵ واحد از C روی ضلع زاویه اختیار می‌کنیم.



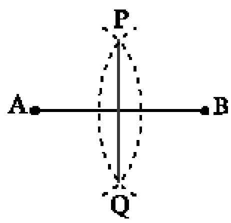
چون $BA > BH$ به مرکز نقطه B و شعاع $AB = ۳$ دایره‌ای رسم کنیم، ضلع دیگر زاویه $\widehat{C}$ را در دو نقطه A و A' قطع می‌کند.

پس دو مثلث ABC و $A'BC$ با معلومات داده شده رسم شده‌اند که غیرهمنهشت‌اند.

سوال ۲۴ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۹ | متوسط

فرض کنید می‌خواهیم عمود منصف پاره‌خط AB را رسم کنیم.

به مرکزهای A و B با شعاعی یکسان، دو کمان را طوری رسم می‌کنیم که با هم متقاطع باشند (اگر شعاع بیش از نصف طول AB باشد، این دو کمان متقاطع خواهند بود).

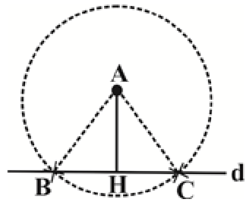


نقاط برخورد این دو کمان (P و Q)، از A و B به یک فاصله هستند، پس روی عمود منصف AB قرار دارند و از آنجا که هر خط با معلوم بودن دو نقطه از آن و وصل کردن این دو نقطه به هم قابل رسم است، می‌توان گفت خط گذرنده از P و Q عمود منصف AB است.

سوال ۲۵ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۷ | متوسط

در صفحه تعداد نقاطی که از خط d و d' به یک اندازه باشند بی‌شمار است چون همه نقاط روی نیمساز زاویه O این ویژگی را دارند، نقاطی که از نقطه O نیز به یک فاصله باشند، روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع‌های متفاوتی می‌باشند اما طول شعاع دایره به مرکز O و نقطه M روی نیمساز که دایره را قطع کرده، همواره بیش‌تر از فاصله M تا دو خط d و d' است. بنابراین هیچ نقطه ای در صفحه وجود ندارد که از دو خط d و d' و نقطه O به یک فاصله باشد.

سوال ۲۶ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۷ | متوسط



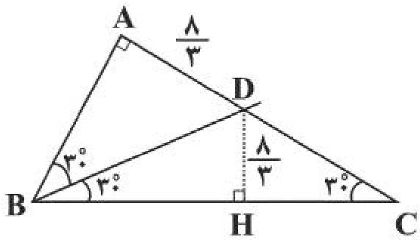
$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}BC.AH \Rightarrow ۱۲ = \frac{۱}{۲}(BC)(۴)$$

$$\Rightarrow ۱۲ = ۲BC \Rightarrow BC = ۶$$

$$\Rightarrow BH = HC = ۳$$

$$\overset{\triangle}{AHC} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} AC^۲ = AH^۲ + HC^۲$$
$$\Rightarrow AC^۲ = ۴^۲ + (۳)^۲ \Rightarrow AC^۲ = ۲۵$$
$$\Rightarrow AC = ۵$$

سوال ۲۷ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۷ | دشوار



$$\begin{cases} \widehat{B} = ۲\widehat{C} \\ \widehat{B} + \widehat{C} = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{B} = ۶۰^\circ , \widehat{C} = ۳۰^\circ$$

چون BD نیمساز زاویه B است. پس $DH = AD = \frac{۸}{۳}$. از طرفی می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه ضلع مقابل به زاویه ۳۰°، نصف وتر است.
پس:

$$C\overset{\triangle}{D}H : DC = ۲(DH) = ۲(\frac{۸}{۳}) = \frac{۱۶}{۳} \Rightarrow AC = AD + DC = ۸$$

$$A\overset{\triangle}{B}C : \cos ۳۰^\circ = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۸}{BC} \Rightarrow BC = \frac{۱۶}{\sqrt{۳}}$$

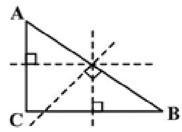
بنابراین:

$$BCD \text{ مساحت مثلث} = \frac{DH \times BC}{۲} = \frac{\frac{\overset{۴}{\cancel{۸}}}{۳} \times \frac{۱۶}{\sqrt{۳}}}{\cancel{۲}} = \frac{۶۴}{۳\sqrt{۳}}$$

سوال ۲۸ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | متوسط

مجموع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰° است. حال اگر رئوس مثلث را A، B و C بنامیم، داریم:

$$\begin{cases} \widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ \\ \widehat{A}+\widehat{B}=\widehat{C} \end{cases} \Rightarrow ۲\widehat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{C}=۹۰^\circ$$



بنابراین $\overset{\Delta}{ABC}$ یک مثلث قائم‌الزاویه می‌باشد. در نتیجه محل تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع این مثلث دقیقاً در وسط ضلع AB وتر مثلث (بزرگ‌ترین ضلع مثلث) قرار دارد.

سوال ۲۹ | گزینه درست: null | تشریحی قلمچی ۱۳۹۷ | دشوار

نقطه D روی نیمساز زاویه A قرار دارد، بنابراین:

$$DH=DH' \to x^۲-۵=x+۱$$
$$\to x^۲-x-۶=۰ \to (x-۳)(x+۲)=۰$$
$$\to \begin{cases} x=۳ & \text{ق ق} \\ x=-۲ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$
$$AC=x+۳ \overset{x=۳}{=} ۳+۳=۶$$
$$AB=x+۲ \overset{x=۳}{=} ۳+۲=۵$$

سوال ۳۰ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۹ | متوسط

فاصله هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط AB تا A و B یکسان است. بنابراین:

$$x^۲-۱۵=۴x-۳$$
$$\Rightarrow x^۲-۴x-۱۲=۰$$
$$\Rightarrow (x-۶)(x+۲)=۰$$

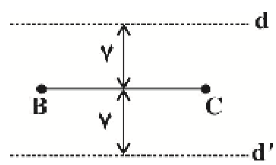
$$\Rightarrow \begin{cases} x-۶=۰ \Rightarrow x=۶ & \text{ق ق} \\ x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

سوال ۳۱ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | متوسط

طول ضلع BC برابر ۶ است. پس با توجه به اینکه مساحت مثلث برابر ۲۱ است، ارتفاع وارد بر ضلع BC برابر است با:

$$S=\frac{BC.h}{۲} \Rightarrow ۲۱=\frac{۶\times h}{۲} \Rightarrow h=۷$$

پس رأس A روی خطی موازی ضلع BC و به فاصله ۷ واحد از آن قرار دارد. پس رأس A روی یکی از دو خط d یا d' قرار دارد:



از طرفی $AB=۵$ است، بنابراین به مرکز B، دایره‌ای به شعاع ۵ رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی این دایره با دو خط d و d' رأس A است. ولی دایره و دو خط متقاطع نیستند، پس هیچ مثلثی نمی‌توان رسم کرد.

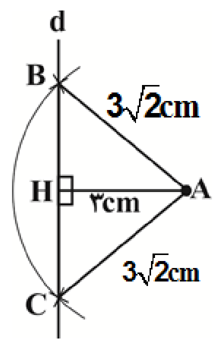
سوال ۳۲ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۷ | متوسط

در شکل زیر، دو مثلث ABH و ACH قائم‌الزاویه هستند. بنابراین داریم:

$$BH = CH = \sqrt{(۳\sqrt{۲})^۲ - ۳^۲} = ۳cm$$

$$\Rightarrow BC = ۶cm$$

چون سه ضلع مثلث ABC با یکدیگر برابر نیستند، پس مثلث متساوی‌الاضلاع نیست.



حال به بررسی رابطه فیثاغورس برای مثلث ABC می‌پردازیم:

$$\sqrt{AB^۲ + AC^۲} = \sqrt{(۳\sqrt{۲})^۲ + (۳\sqrt{۲})^۲} = ۶cm = BC$$

چون رابطه فیثاغورس برای مثلث ABC برقرار است، پس این مثلث قائم‌الزاویه است. از طرفی مساحت آن برابر است با:

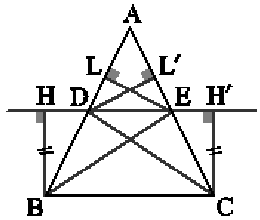
$$S_{A\hat{B}C} = \frac{۳ \times ۶}{۲} = ۹\ cm^۲$$

سوال ۳۳ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۹ | متوسط

قضیه‌ی تالس: در مثلث ABC، دو نقطه‌ی D و E را به ترتیب روی AB و AC در نظر می‌گیریم به‌طوری که $BC \parallel DE$، در این صورت

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$$

اثبات: مطابق شکل، در مثلث ABC، پاره‌خط DE را موازی BC در نظر بگیرید.



برای دو مثلث DAE و DEC می‌توان نوشت:

$$\frac{S(\overset{\Delta}{DAE})}{S(\overset{\Delta}{DEC})} = \frac{\frac{۱}{۲}DL' \times AE}{\frac{۱}{۲}DL' \times EC} = \frac{AE}{EC} \quad (۱)$$

همچنین برای دو مثلث DAE و DEB می‌توان نوشت:

$$\frac{S(\overset{\Delta}{DAE})}{S(\overset{\Delta}{DEB})} = \frac{\frac{۱}{۲}EL \times AD}{\frac{۱}{۲}EL \times DB} = \frac{AD}{DB} \quad (۲)$$

از طرفی:

$$\begin{cases} S(\overset{\Delta}{DEC}) = \frac{۱}{۲}CH' \times DE \\ S(\overset{\Delta}{DEB}) = \frac{۱}{۲}BH \times DE \end{cases}$$

$$\xrightarrow{BH=CH'} S(\overset{\Delta}{DEC}) = S(\overset{\Delta}{DEB}) \quad (۳)$$

$$(۱), (۲), (۳) \Rightarrow \frac{S(\overset{\Delta}{DAE})}{S(\overset{\Delta}{DEC})} = \frac{S(\overset{\Delta}{DAE})}{S(\overset{\Delta}{DEB})}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$$

سوال ۳۴ | گزینه درست: null | تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۸ | متوسط

$$MN||BC \Rightarrow \frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{AN}{۶}=\frac{۶}{۸}$$
$$\Rightarrow AN=۴/۵$$

$$\Rightarrow NC=AC-AN=۶-۴/۵=۱/۵$$

از طرفی:

$$EP||AM \Rightarrow \frac{NE}{NA}=\frac{NP}{NM}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{NE}{۴/۵}=\frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow NE=۲/۲۵$$

بنابراین:

$$EC=NE+NC=۲/۲۵+۱/۵=۳/۷۵$$

سوال ۳۵ | گزینه درست: null | سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ | متوسط

اگر α و β را از ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲-۹x+m=۰$ در نظر بگیریم، طبق فرض که یکی از ریشه‌ها، دو برابر دیگری است، داریم: $\alpha=۲\beta$. از طرفی مجموع ریشه‌های معادله برابر با $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{۹}{۲}$ است، پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\alpha=۲\beta\\ \alpha+\beta=\frac{۹}{۲}\end{cases} \xrightarrow{\alpha=۲\beta} ۳\beta=\frac{۹}{۲} \Rightarrow \beta=\frac{۳}{۲}\ ,\ \alpha=۳$$

ریشه‌های معادله در خود معادله صدق می‌کنند، بنابراین:

$$\xrightarrow{\alpha=۳} ۲(۳)^۲-۹(۳)+m=۰ \Rightarrow m=۹$$

سوال ۳۶ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۹ | متوسط

با توجه به خواص نسبت و تناسب داریم:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{\text{تعویض جای طرفین با وسطین}} \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

حال دو طرف تساوی $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \xrightarrow{\text{طرفین تناسب به توان ۳}} \frac{a^۳}{c^۳}=\frac{b^۳}{d^۳}$$

اکنون از خاصیت تفضیل نسبت در صورت استفاده می‌کنیم:

$$\frac{a^۳}{c^۳}=\frac{b^۳}{d^۳} \Rightarrow \frac{a^۳-c^۳}{c^۳}=\frac{b^۳-d^۳}{d^۳} \Rightarrow \frac{۶۴}{c^۳}=\frac{۲۷}{d^۳}$$

$$\Rightarrow \frac{c^۳}{d^۳}=\frac{۶۴}{۲۷} \Rightarrow (\frac{c}{d})^۳=(\frac{۴}{۳})^۳ \xrightarrow{\sqrt[۳]{}} \frac{c}{d}=\frac{۴}{۳} \quad (*)$$

از طرفی با توجه به اطلاعات سؤال می‌دانیم که $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ است. پس:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{(*)} \frac{a}{b}=\frac{۴}{۳}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{۴}{۳} \xrightarrow{\text{طرفین تناسب به توان ۲}} \frac{a^۲}{b^۲}=\frac{۱۶}{۹}$$

$$\Rightarrow \frac{b^۲}{a^۲}=\frac{۹}{۱۶}$$

متوسط | نهایی ۱۴۰۰ | گزینه درست: null | سوال ۳۷

$$BC^۲ = ۸^۲ + ۶^۲$$
$$BC^۲ = ۶۴ + ۳۶$$
$$BC^۲ = ۱۰۰$$
$$BC = ۱۰$$

$$AB^۲ = BH.BC$$
$$۸^۲ = BH \times ۱۰ \Rightarrow BH = \frac{۶۴}{۱۰} = ۶/۴$$

$$AC^۲ = CH.BC$$
$$۶^۲ = CH \times ۱۰$$
$$CH = \frac{۳۶}{۱۰} = ۳/۶$$

دشوار | تشریحی ۱۳۹۹ | گزینه درست: null | سوال ۳۸

با استفاده از ویژگی‌های تناسب داریم:

$$\frac{۲a}{۳} = \frac{c}{۵} \Rightarrow ۱۰a = ۳c \Rightarrow a = \frac{۳}{۱۰}c$$

$$\frac{b+a}{۲} = \frac{c}{۵} \xrightarrow{a=\frac{۳}{۱۰}c} \frac{b+\frac{۳}{۱۰}c}{۲} = \frac{c}{۵} \Rightarrow b + \frac{۳}{۱۰}c = \frac{۲}{۵}c$$
$$\Rightarrow b = \frac{۲}{۵}c - \frac{۳}{۱۰}c \Rightarrow b = \frac{۱}{۱۰}c$$

$$\frac{a+c}{b} = \frac{\frac{۳}{۱۰}c + c}{\frac{۱}{۱۰}c} = \frac{\frac{۱۳}{۱۰}c}{\frac{۱}{۱۰}c} = ۱۳$$

متوسط | تشریحی ۱۳۹۹ | گزینه درست: null | سوال ۳۹

اگر α و β را ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲ - ۹x + m = ۰$ در نظر بگیریم، طبق فرض که یکی از ریشه‌ها، دو برابر دیگری است، داریم: $\alpha = ۲\beta$. از طرف مجموع ریشه‌های معادله برابر با $\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{۹}{۲}$ است، پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \alpha = ۲\beta \\ \alpha + \beta = \frac{۹}{۲} \end{cases} \xrightarrow{\alpha=۲\beta} ۳\beta = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \beta = \frac{۳}{۲}\ ,\ \alpha = ۳$$

ریشه‌های معادله در خود معادله صدق می‌کنند، بنابراین:

$$\xrightarrow{\alpha=۳} ۲(۳)^۲ - ۹(۳) + m = ۰ \Rightarrow m = ۹$$

متوسط | نهایی ۱۴۰۰ | گزینه درست: null | سوال ۴۰

الف) اگر یک چهار ضلعی متوازی الاضلاع باشند آنگاه قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

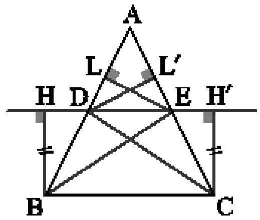
ب) نشان می‌دهیم n نمی‌تواند زوج باشد. اگر n زوج باشد آنگاه $n = ۲k$ که در آن $k \in Z$ این نشان می‌دهد که $n^۲$ زوج است و این دو تناقض با فرض مسئله است لذا نمی‌تواند زوج باشد و در نتیجه n یک عدد فرد است.

$$n^۲ = (۲k)^۲ = ۴k^۲ = ۲(۲k^۲)$$

سوال ۴۱ | گزینه درست: null | سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ | متوسط

قضیه‌ی تالس: در مثلث ABC، دو نقطه‌ی D و E را به ترتیب روی AB و AC در نظر می‌گیریم به‌طوری که $BC \parallel DE$، در این صورت
$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$

اثبات: مطابق شکل، در مثلث ABC، پاره‌خط DE را موازی BC در نظر بگیرید.



برای دو مثلث DAE و DEC می‌توان نوشت:

$$\frac{S(D\overset{\Delta}{A}E)}{S(D\overset{\Delta}{E}C)} = \frac{\frac{۱}{۲}DL' \times AE}{\frac{۱}{۲}DL' \times EC} = \frac{AE}{EC} \quad (۱)$$

همچنین برای دو مثلث DAE و DEB می‌توان نوشت:

$$\frac{S(D\overset{\Delta}{A}E)}{S(D\overset{\Delta}{E}B)} = \frac{\frac{۱}{۲}EL \times AD}{\frac{۱}{۲}EL \times DB} = \frac{AD}{DB} \quad (۲)$$

از طرفی:

$$\begin{cases} S(D\overset{\Delta}{E}C) = \frac{۱}{۲}CH' \times DE \\ S(D\overset{\Delta}{E}B) = \frac{۱}{۲}BH \times DE \end{cases}$$

$$\xrightarrow{BH=CH'} S(D\overset{\Delta}{E}C) = S(D\overset{\Delta}{E}B) \quad (۳)$$

$$(۱)\,,\,(۲)\,,\,(۳) \Rightarrow \frac{S(D\overset{\Delta}{A}E)}{S(D\overset{\Delta}{E}C)} = \frac{S(D\overset{\Delta}{A}E)}{S(D\overset{\Delta}{E}B)}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$$

سوال ۴۲ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۹ | متوسط

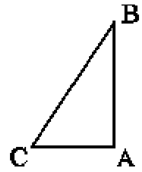
فرض می‌کنیم حکم مسأله غلط باشد، یعنی عدد طبیعی n فرد نباشد، در این صورت n زوج است و می‌توانیم فرض کنیم $n = ۲k$ که در آن k یک عدد طبیعی است، در این صورت:

$$n^۲ = (۲k)^۲ = ۴k^۲ = ۲(۲k)^۲$$

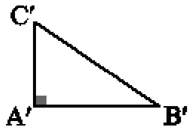
یعنی $n^۲$ نیز عددی زوج است که این با فرض مسأله در تناقض است. بنابراین از ابتدا n نمی‌توانست عددی زوج باشد و حکم مسأله درست است.

سوال ۴۳ | گزینه درست: null | سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ | متوسط

عکس قضیه‌ی فیثاغـورس: فـرض کنیـد در مثلث ABC، رابطه‌ی $BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$ بین طول اضلاع برقرار است، در این صورت $\widehat{A} = ۹۰^\circ$.



برای اثبات، دو پاره‌خط عمود بر هم $A'B'$ و $A'C'$ را طوری در نظر می‌گیریم که $A'B' = AB$ و $A'C' = AC$.



در این صورت با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $A'B'C'$، داریم:

$$B'C'^۲ = A'B'^۲ + A'C'^۲ \xrightarrow[A'C'=AC]{A'B'=AB}$$

$$B'C'^۲ = AB^۲ + AC^۲ \quad (*)$$

از طرفی طبق فرض قضیه $BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$، پس:

$$\xrightarrow{(*)} B'C'^۲ = BC^۲ \Rightarrow B'C' = BC$$

$$\xrightarrow[A'C'=AC]{A'B'=AB} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

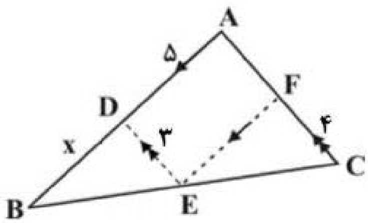
از آنجا که مثلث ABC با مثلث $A'B'C'$ همنهشت است، داریم:

$$\widehat{A} = \widehat{A'} = ۹۰^\circ$$

سوال ۴۴ | گزینه درست: null | تشریحی قلمچی ۱۳۹۸ | متوسط

چهار ضلعی ADEF متوازی الاضلاع است.

پس $AD = EF = ۵ \;,\; DE = AF = ۳$



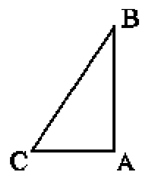
$$DE || AC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{DE}{AC} = \frac{BD}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۳+۴} = \frac{x}{x+۵}$$

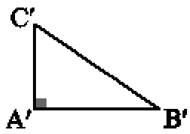
$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{۳}{۴} = \frac{x}{۵} \Rightarrow x = \frac{۱۵}{۴}$$

سوال ۴۵ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۹ | متوسط

عکس قضیه‌ی فیثاغـورس: فـرض کنیـد در مثلث ABC، رابطه‌ی $BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$ بین طول اضلاع برقرار است، در این صورت $\widehat{A} = ۹۰^\circ$.



برای اثبات، دو پاره‌خط عمود بر هم $A'B'$ و $A'C'$ را طوری در نظر می‌گیریم که $A'B' = AB$ و $A'C' = AC$.



در این صورت با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $A'B'C'$، داریم:

$$B'C'^۲ = A'B'^۲ + A'C'^۲ \xrightarrow[A'C'=AC]{A'B'=AB}$$

$$B'C'^۲ = AB^۲ + AC^۲ \quad (*)$$

از طرفی طبق فرض قضیه $BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$، پس:

$$\xrightarrow{(*)} B'C'^۲ = BC^۲ \Rightarrow B'C' = BC$$

$$\xrightarrow[A'C'=AC]{A'B'=AB} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

از آنجا که مثلث ABC با مثلث $A'B'C'$ همنهشت است، داریم:

$$\widehat{A} = \widehat{A'} = ۹۰^\circ$$

سوال ۴۶ | گزینه درست: null | تشریحی قلمچی ۱۳۹۷ | متوسط

$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} = ۱ \Rightarrow MN || AB || DC$$

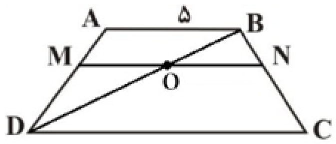
$$ME || AB \xrightarrow[\text{در } \overset{\Delta}{ADB}]{\text{طبق قضیه تالس}} \frac{ME}{AB} = \frac{DM}{DA} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ME = \frac{۱}{۲} AB = ۴$$

$$MF || DC \xrightarrow[\text{در } \overset{\Delta}{DAC}]{\text{طبق قضیه تالس}} \frac{MF}{DC} = \frac{AM}{AD} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow MF = \frac{۱}{۲} DC = ۶ \Rightarrow x = EF = MF - ME = ۶ - ۴ = ۲$$

سوال ۴۷ | گزینه درست: null | تشریحی قلمچی ۱۳۹۹ | متوسط

با توجه به شکل روبه‌رو داریم:



$$\frac{AM}{MD}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{MD}{AM}=\frac{۳}{۱}\Rightarrow\frac{MD}{DA}=\frac{۳}{۴}$$

$$\overset{\Delta}{ABD}\ :\ MO\,||\,AB\Rightarrow\frac{MO}{۵}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow MO=\frac{۱۵}{۴}\Rightarrow ON=\frac{۲۸}{۴}-\frac{۱۵}{۴}=\frac{۱۳}{۴}$$

$$\overset{\Delta}{BDC}\ :ON\,||\,DC\Rightarrow\frac{ON}{DC}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{\frac{۱۳}{۴}}{DC}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow DC=۱۳$$

سوال ۴۸ | گزینه درست: null | نهایی ۱۴۰۰ | متوسط

$$\frac{۹}{x}=\frac{x}{۴}\Rightarrow x^۲=۳۶\Rightarrow x=+۶$$

$$\frac{۹}{۱۵}=\frac{۲y-۱}{۸}\Rightarrow۱۵(۲y-۱)=۷۲$$

$$۳۰y-۱۵=۷۲$$

$$۳۰y=۸۷\Rightarrow y=\frac{۲۹}{۱۰}=۲/۹$$

سوال ۴۹ | گزینه درست: null | سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ | متوسط

با استفاده از برهان خلف، فرض می‌کنیم $AB=AC$ در این صورت مثلث ABC متساوی‌الساقین است و نیمساز داخلی زاویه‌ی رأسA، میانه‌ی وارد بر قاعده نیز هست، یعنی $BD=DC$ که این امر در تناقض با فرض مسأله است، پس فرض برهان خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

سوال ۵۰ | گزینه درست: null | تشریحی قلمچی ۱۳۹۶ | متوسط

الف) اضلاع زاویهٔ قائمه:α,β

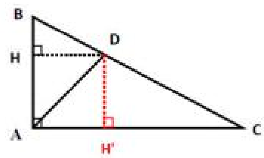
$$\left.\begin{matrix}\frac{\alpha\beta}{۲}=۶\to\alpha\beta=۱۲\\ \alpha+\beta=۷\end{matrix}\right\}\to S=۷\ ,\ P=۱۲\to x^۲-Sx+P=۰$$

$$\to x^۲-۷x+۱۲=۰\to\alpha=۳\ ,\ \beta=۴$$

ب)

مربع HDH` A $\to$ $DH=DH'=x$ $\to$D روی نیمساز

$$\frac{BH}{BA}=\frac{HD}{AC}\to\frac{۳-x}{۳}=\frac{x}{۴}\to x=\frac{۱۲}{۷}$$ →تالس



سوال ۵۱ | گزینه درست: null | تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۸ | متوسط

طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$ED||FB \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EF} \quad \boxed{1}$$

$$FD||BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC} \quad \boxed{2}$$

$$\xrightarrow{\boxed{1}\ ,\ \boxed{2}} \frac{AE}{EF} = \frac{AF}{FC}$$

$$\Rightarrow \frac{2x-1}{x} = \frac{3x-1}{2} \Rightarrow 3x^2 - x = 4x - 2$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ق ق} \\ x = \frac{2}{3} \text{ ق ق} \end{cases}$$

سوال ۵۲ | گزینه درست: null | تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۷ | متوسط

$$\left.\begin{array}{l} BE \parallel CF \rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EF} \\ EC \parallel FD \rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{AE}{EF} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD}$$

$$\rightarrow \frac{4}{x} = \frac{4+x}{2x-1}$$

$$\rightarrow 8x - 4 = 4x + x^2$$

$$\rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 0$$

$$\rightarrow x = 2$$

$$AD = 4 + x + (2x-1) = 4 + 2 + 3 = 9$$

سوال ۵۳ | گزینه درست: null | تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۹ | متوسط

چون میلهٔ پرچم و شخص هر دو بر زمین عمود هستند، پس با هم موازی‌اند و طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$(EB = x)$$

$$\frac{x}{x+4} = \frac{1/6}{8} \quad \Rightarrow \frac{x}{x+4} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5x = x + 4$$

$$\Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$$

$$ED = EB + BD = 1 + 4 = 5$$

در مثلث EDC، طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$EC = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89}$$

سوال ۵۴ | گزینه درست: null | سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ | متوسط

در مثلث ABC دو نقطهٔ M و N به ترتیب روی دو ضلع AB و AC قرار دارند، در این صورت $MN \parallel BC$ اگر و فقط اگر $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$.

سوال ۵۵ | گزینه درست: null | سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ | متوسط

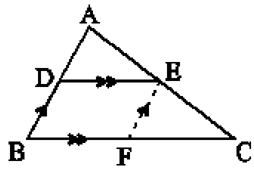
فرض می‌کنیم حکم مسأله غلط باشد، یعنی عدد طبیعی n فرد نباشد، در این صورت n زوج است و می‌توانیم فرض کنیم $n = 2k$ که در آن k یک عدد طبیعی است، در این صورت:

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k)^2$$

یعنی n^2 نیز عددی زوج است که این با فرض مسأله در تناقض است. بنابراین از ابتدا n نمی‌توانست عددی زوج باشد و حکم مسأله درست است.

سوال ۵۶ | گزینه درست: null | سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ | متوسط

مطابق شکل، از نقطه‌ی E، پاره‌خط EF را موازی AB رسم می‌کنیم، داریم:



$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}$$

$$\frac{AD}{AD+BD} = \frac{AE}{AE+CE} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (*)$$

$$EF \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{CF}{BF} = \frac{CE}{AE} \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}}$$

$$\frac{CF+BF}{BF} = \frac{CE+AE}{AE} \Rightarrow \frac{BC}{BF} = \frac{AC}{AE} \xrightarrow{\text{معکوس}}$$

$$\frac{BF}{BC} = \frac{AE}{AC} \quad (**)$$

$$(*)\ ,\ (**) \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC} \quad (***)$$

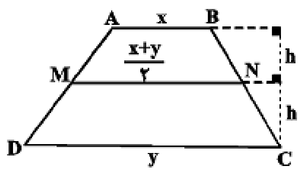
از طرفی چهار ضلعی $BDEF$ متوازی‌الاضلاع است، پس $BF = DE$، بنابراین:

$$(***) \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

سوال ۵۷ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۹ | متوسط

در مثلث ABC دو نقطه‌ی M و N به ترتیب روی دو ضلع AB و AC قرار دارند، در این صورت $MN \parallel BC$ اگر و فقط اگر $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$.

سوال ۵۸ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۴۰۰ | متوسط



$$\frac{S_۱}{S_۲} = \frac{۵}{۷} \Rightarrow \frac{\frac{۱}{۲}(x + \frac{x+y}{۲})(h)}{\frac{۱}{۲}(\frac{x+y}{۲} + y)(h)} = \frac{۵}{۷} \Rightarrow \frac{\frac{۳x+y}{۲}}{\frac{x+۳y}{۲}} = \frac{۵}{۷}$$

$$\frac{۳x+y}{x+۳y} = \frac{۵}{۷} \Rightarrow ۲۱x + ۷y = ۵x + ۱۵y \Rightarrow ۱۶x = ۸y \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{x}{y} = \frac{۱}{۲}$$

سوال ۵۹ | گزینه درست: null | سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ | متوسط

الف) $\frac{a}{a+۵} = \frac{b}{b+۷}$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{a}{(a+۵)-a} = \frac{b}{(b+۷)-b}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{۵} = \frac{b}{۷} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{۵}{۷}$$

ب) $\frac{۳a+۱۰}{۱۰+۲a} = \frac{۳b+۷}{۷+۲b} \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}}$

$$\frac{(۳a+۱۰)-(۱۰+۲a)}{۱۰+۲a} = \frac{(۳b+۷)-(۷+۲b)}{۷+۲b}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{۱۰+۲a} = \frac{b}{۷+۲b} \xrightarrow{\times ۲} \frac{۲a}{۱۰+۲a} = \frac{۲b}{۷+۲b}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{۲a}{(۱۰+۲a)-۲a} = \frac{۲b}{(۷+۲b)-۲b}$$

$$\Rightarrow \frac{۲a}{۱۰} = \frac{۲b}{۷} \Rightarrow \frac{۲a}{۲b} = \frac{۱۰}{۷} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{۱۰}{۷}$$

سوال ۶۰ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۹ | متوسط

اگر P و P' محیط‌های دو مثلث متشابه باشند، داریم:

$$\begin{cases} \frac{P}{P'} = \frac{۳}{۷} \\ P' = P+۲۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{P+۲۰} = \frac{۳}{۷} \Rightarrow ۷P = ۳P+۶۰ \Rightarrow ۴P = ۶۰ \Rightarrow P = ۱۵$$
$$\Rightarrow P' = ۳۵$$

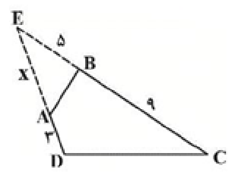
بنابراین: $P+P' = ۱۵+۳۵ = ۵۰$

سوال ۶۱ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۷ | دشوار

$\widehat{B} + \widehat{D} = ۱۸۰^\circ$ است، پس زاویه خارجی رأس B با زاویه D برابر است و

زاویه E در هر دو مثلث ABE و CDE مشترک است. پس دو مثلث

ABE و CDE متشابه‌اند.



$$\frac{۵}{x+۳} = \frac{x}{۱۴} \Rightarrow x^۲+۳x = ۷۰$$
$$\Rightarrow x^۲+۳x-۷۰ = ۰$$

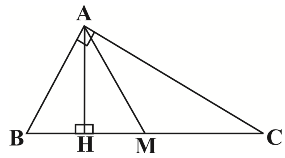
$$\Rightarrow (x+۱۰)(x-۷) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱۰ & \text{غ ق ق} \\ x = ۷ \end{cases}$$

$$\frac{S_{ABE}}{S_{CDE}} = \left(\frac{۵}{۷+۳}\right)^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{S_{CDE}-S_{ABE}}{S_{CDE}}$$
$$= \frac{S_{ABCD}}{S_{CDE}} = \frac{۴-۱}{۴} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{S_{CDE}}{S_{ABCD}} = \frac{۴}{۳}$$

سوال ۶۲ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۷ | دشوار

$$AM = ۳ \xrightarrow[\text{میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است}]{AM \text{ میانه است}}$$

$$BM = CM = ۳ \to BC = ۶$$



$$AH^۲ = BH \times CH \to (۲\sqrt{۲})^۲ = BH \times CH \Rightarrow BH \times CH = ۸$$

از طرفی : $BH + CH = ۶ \Rightarrow CH = ۶ - BH$

$$\Rightarrow BH(۶ - BH) = ۸ \Rightarrow BH^۲ - ۶BH + ۸ = ۰ \Rightarrow (BH - ۴) \times (BH - ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BH = ۴ \\ BH = ۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{با توجه به شکل}} BH = ۲ \Rightarrow CH = ۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB^۲ = BH \times BC = ۲ \times ۶ = ۱۲ \Rightarrow AB = ۲\sqrt{۳} \\ AC^۲ = CH \times BC = ۴ \times ۶ = ۲۴ \Rightarrow AC = ۲\sqrt{۶} \end{cases}$$

سوال ۶۳ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | متوسط

در دو مثلث متشابه، نسبت اضلاع متناظر با هم متناسب هستند. از آنجا که $\frac{۴}{۶} \neq \frac{۳}{۵}$ و نیز $\frac{۴}{۵} \neq \frac{۳}{۶}$ ، پس a و b با هم متناظر نیستند. بنابراین یکی از حالات زیر ممکن است روی دهد:

$$\frac{۳}{b} = \frac{۴}{۶} = \frac{a}{۵}$$
$$\frac{۳}{b} = \frac{۴}{۵} = \frac{a}{۶}$$
$$\frac{۳}{۵} = \frac{۴}{b} = \frac{a}{۶}$$
$$\frac{۳}{۶} = \frac{۴}{b} = \frac{a}{۵}$$

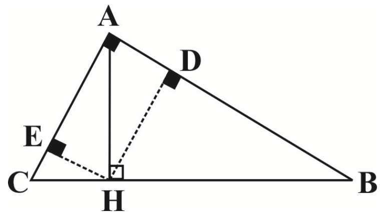
در نتیجه چهار حالت فوق وجود دارد.

سوال ۶۴ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

با توجه به فرض مسأله:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABH}} = ۱/۸ = \frac{۱۸}{۱۰} = \frac{۹}{۵} \Rightarrow \frac{S_{ABC} - S_{ABH}}{S_{ABH}} = \frac{۹-۵}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ACH}}{S_{ABH}} = \frac{۴}{۵}$$



از طرفی مثلث‌های ACH و ABH متشابه‌اند و می‌دانیم که در دو مثلث متشابه نسبت مساحت‌ها با مربع نسبت تشابه برابر است، پس:

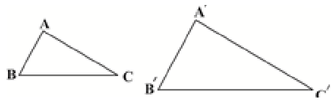
$$k^۲ = \frac{۴}{۵} \Rightarrow k = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

EH و DH به ترتیب ارتفاع‌های مثلث‌های ACH و BHA هستند و می‌دانیم که در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌ها با نسبت تشابه برابر است، پس:

$$k = \frac{EH}{DH} = \frac{۲}{\sqrt{۵}} \Rightarrow \frac{DH}{EH} = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

سوال ۶۵ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | متوسط

فرض می‌کنیم بزرگ‌ترین ضلع مثلث $A'B'C'$، $B'C'$ و کوچک‌ترین ضلع آن $A'B'$باشد.



$$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{A'B'}{B'C'} \ (*)$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{۹}{۱۶} \Rightarrow k^۲ = \frac{۹}{۱۶} \Rightarrow k = \frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{B'C'} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{۷}{B'C'} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow B'C' = \frac{۲۸}{۳}$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{۲}{۳} = \frac{A'B'}{\frac{۲۸}{۳}} \Rightarrow A'B' = \frac{۲}{۳} \times \frac{۲۸}{۳} = \frac{۵۶}{۹}$$

سوال ۶۶ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۷ | متوسط

$$AB \| CD \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{D}, \widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow \overset{\triangle}{AOB} \sim \overset{\triangle}{COD}$$

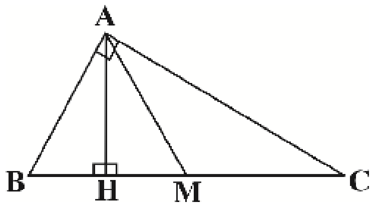
$$\Rightarrow \frac{AO}{OD} = \sqrt{\frac{S_{AOB}}{S_{COD}}} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{AO}{OD} = \frac{۳}{۲}$$

$$AO + OD = ۱۵ \Rightarrow OD = ۶$$

سوال ۶۷ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۷ | متوسط

$$AM = ۳ \xrightarrow[\text{میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است}]{AM \text{ میانه است}}$$

$$BM = CM = ۳ \rightarrow BC = ۶$$



$$AH^۲ = BH \times CH \rightarrow (۲\sqrt{۲})^۲ = BH \times CH \Rightarrow BH \times CH = ۸$$

از طرفی : $BH + CH = ۶ \Rightarrow CH = ۶ - BH$

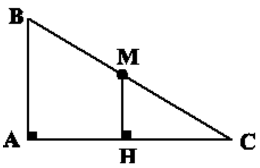
$$\Rightarrow BH(۶ - BH) = ۸ \Rightarrow BH^۲ - ۶BH + ۸ = ۰$$

$$\Rightarrow (BH - ۴) \times (BH - ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BH = ۲ \\ BH = ۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{با توجه به شکل}} BH = ۲ \, , \, CH = ۴$$
$$\Rightarrow \begin{cases} AB^۲ = BH \times BC = ۲ \times ۶ = ۱۲ \Rightarrow AB = ۲\sqrt{۳} \\ AC^۲ = CH \times BC = ۴ \times ۶ = ۲۴ \Rightarrow AC = ۲\sqrt{۶} \end{cases}$$

سوال ۶۸ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۹ | متوسط

چون فاصله O از سه نقطه A، B و C مساوی است، پس در محل تلاقی عمودمنصف‌ها قرار دارد. فرض کنید عمودمنصف وتر BC، وتر را در M قطع کند. در این‌صورت با رسم ارتفاع MH داریم:



$$\begin{matrix} MH || AB \\ MC = MB \end{matrix} \Rightarrow CH = AH$$

بنابراین MH روی عمودمنصف AC قرار دارد.

لذا نقطه M، همان نقطه تلاقی عمودمنصف‌ها است. لذا $O = M$ است و در نتیجه $BC = ۶$. اینک داریم:

$$\begin{matrix} AB^۲ + AC^۲ = ۳۶ \\ \frac{۱}{۲} AB \times AC = ۹ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} AB^۲ + AC^۲ = ۳۶ \\ AB \times AC = ۱۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB^۲ + AC^۲ - ۲AB \times AC = ۳۶ - ۳۶ = ۰$$
$$\Rightarrow (AB - AC)^۲ = ۰ \Rightarrow AB = AC$$
$$\Rightarrow AB = AC = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

چون $BC = ۶$ بود، پس:

$$\text{محیط} = ۳\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۲} + ۶ = ۶(\sqrt{۲} + ۱)$$

سوال ۶۹ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

نسبت تشابه برابر ۴ است. پس نسبت مساحت‌ها برابر $۴^۲ = ۱۶$ می‌باشد. اگر اضلاع قائمه در مثلث بزرگتر را a و b بگیریم، داریم:

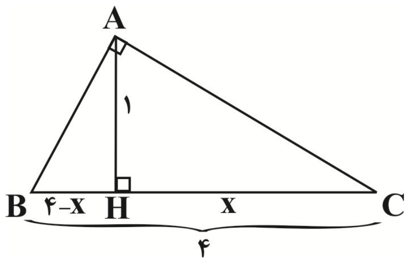
$$S = \frac{ab}{۲} = ۱۶ \times ۵ = ۸۰ \Rightarrow ab = ۱۶۰$$

$$\text{b و a واسطه هندسی مثبت} = \sqrt{ab} = \sqrt{۱۶۰} = ۴\sqrt{۱۰}$$

سوال ۷۰ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

از تشابه دو مثلث ABH و ACH نتیجه می‌شود:

$$AH^۲ = BH \times CH$$



بنابراین: $۱^۲ = x(۴ - x) \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$

$$\Rightarrow x = \frac{۴ \pm \sqrt{۱۲}}{۲} = ۲ \pm \sqrt{۳}$$

از آنجا که پاره‌خط بزرگ‌تر مدنظر است، $۲ + \sqrt{۳}$ پاسخ صحیح است.

سوال ۷۱ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۹ | متوسط

$$BC = \frac{۵}{۴}AB = ۵ \Rightarrow \begin{cases} BC = ۵ \\ AB = ۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} AC = ۳$$

دو مثلث قائم‌الزاویه ABC و ABD زوایای حاده برابر دارند. پس متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow BD = \frac{AB^۲}{AC} = \frac{۱۶}{۳}$$

سوال ۷۲ | گزینه درست: null | تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۸ | متوسط

چون دو ضلع AB و CD موازی نیستند، برای اینکه دو مثلث متشابه باشد باید:

$$\underbrace{\frac{x-۱}{x+\frac{۱}{۲}} = \frac{x}{x+۲}}_{*} = \frac{y}{۹}, \qquad \overbrace{\frac{x}{x+۲} = \frac{y}{۹}}^{**}$$

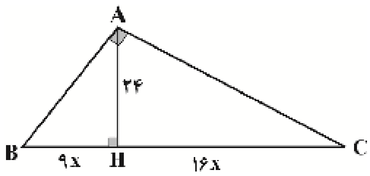
$$\xrightarrow{*} x^۲ + x - ۲ = x^۲ + \frac{۱}{۲}x$$

$$\Rightarrow x - ۲ = \frac{۱}{۲}x \Rightarrow \frac{۱}{۲}x = ۲ \Rightarrow x = ۴$$

$$\xrightarrow{**} \frac{۴}{۶} = \frac{y}{۹} \Rightarrow y = ۶$$

سوال ۷۳ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۷ | متوسط

طبق فرض سؤال $\frac{BH}{CH}=\frac{۹}{۱۶}$، پس فرض می‌کنیم $BH=۹x$ و $CH=۱۶x$ باشد، از طرفی داریم:



$$AH^۲=BH\times CH\Rightarrow ۲۴^۲=(۹x)(۱۶x)$$

$$\Rightarrow x^۲=\frac{۲۴\times ۲۴}{۱۶\times ۹}=۴\Rightarrow x=۲\Rightarrow \begin{cases}BH=۱۸\\ CH=۳۲\end{cases}$$

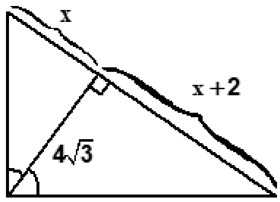
در مثلث قائم‌الزاویه ABH داریم:

$$AB^۲=BH^۲+AH^۲=۱۸^۲+۲۴^۲$$

$$=۶^۲\times(۳^۲+۴^۲)=۶^۲\times ۵^۲\Rightarrow AB=۶\times ۵=۳۰$$

سوال ۷۴ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | متوسط

در مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر واسطه هندسی بین دو قطعه‌ای است که روی وتر جدا می‌کند:



$$(۴\sqrt{۳})^۲=x(x+۲)\Rightarrow x^۲+۲x-۴۸=۰$$

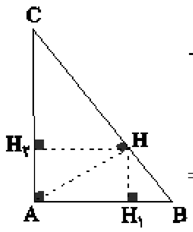
$$\Rightarrow (x-۶)(x+۸)=۰\Rightarrow \begin{cases}x=۶ & \text{ق ق}\\ x=-۸ & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$\text{وتر}=x+x+۲=۶+۶+۲=۱۴$$

$$\Rightarrow \text{مساحت}=\frac{\text{وتر}\times\text{ارتفاع}}{۲}=\frac{۴\sqrt{۳}\times ۱۴}{۲}=۲۸\sqrt{۳}$$

سوال ۷۵ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۹ | متوسط

در مثلث قائم‌الزاویه ABC، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث را به دو مثلث متشابه تقسیم می‌کند. یعنی مثلث‌های ABH و ACH با هم متشابهند.



$$\frac{S(\overset{\Delta}{ABH})}{S(\overset{\Delta}{ABC})} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow \frac{S(\overset{\Delta}{ABH})}{S(\overset{\Delta}{ABC}) - S(\overset{\Delta}{ABH})} = \frac{۱}{۵-۱}$$

$$\Rightarrow \frac{S(\overset{\Delta}{ABH})}{S(\overset{\Delta}{ACH})} = \frac{۱}{۴}$$

بنابراین نسبت مساحت دو مثلث متشابه $\frac{۱}{۴}$ است. در نتیجه نسبت تشابه دو مثلث $\frac{۱}{۲}$ است. در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌ها همان نسبت تشابه است. در نتیجه داریم:

$$\frac{HH_۱}{HH_۲} = \frac{۱}{۲}$$