نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: -

تاریخ برگزاری:

مدت زمان آزمون: --

مرکز مشاوره قلم چی

---

۱) تشریحی قلمچی ۱۳۹۶ — دشوار

نمودار توابع $y_1=[x-1]$ و $y_2=[x]-1$ را در بازهٔ $[-2,1)$ در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید. چه رابطه ای بین این دو تابع وجود دارد؟ بارم: ۱.۲۵

چه نتیجه ای می گیرید؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۲) تشریحی ۱۳۹۷ — دشوار

اگر $\frac{13}{2}<[x]<\frac{17}{3}$، آن‌گاه حاصل $[-2x]$ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟ بارم: ۱

۳) تشریحی ۱۳۹۶ — دشوار

اگر $f(x)=x-[\sqrt{x}]$.، حاصل $f(1)+f(2)+...+f(10)$ کدام است؟ بارم: ۱

۴) تشریحی ۱۳۹۳ — دشوار

اگر $[\frac{1-x}{x}]=1$، آن‌گاه تعداد مقادیر ممکن برای عبارت $[-6x]$کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.) بارم: ۱

۵) تشریحی ۱۳۹۸ — دشوار

برد تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ با دامنه $\mathbb{R}-[-\frac{1}{5}\,,\,\frac{1}{5}]$، شامل چند عدد صحیح است؟ بارم: ۱

۶) تشریحی ۱۳۹۶ — دشوار

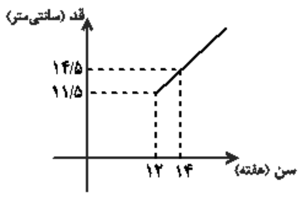
اگر برد تابع $f(x)=x+\frac{x}{|x|}$ را مجموعه A و برد تابع $g(x)=x^2-6x$ را B در نظر بگیریم، در این صورت مجموعه‌ی $B-A$ شامل چند عدد صحیح است؟ بارم: ۱

۷) تشریحی قلمچی ۱۳۹۶ — دشوار

نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{[x]+[-x]}$ را رسم نموده، سپس دامنه و برد آن را تعیین کنید ([ ] نماد جزء صحیح است) بارم: ۱.۲۵

۸) سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ — دشوار

نمودار تابع رشد قد جنین از هفته‌ی دوازدهم به بعد به‌صورت مقابل است. با توجه به این نمودار به سؤالات زیر پاسخ دهید. بارم: ۱



الف) در انتهای هفته‌ی هفدهم طول قد جنین چقدر است؟

ب) در پایان چه هفته‌ای طول قد جنین ۲۵ سانتی‌متر خواهد شد؟

۹) تشریحی ۱۳۹۹ — دشوار

اگر برد تابع $f(x)=x-5[\frac{x}{5}]+3$ به‌صورت بازه $[a,b)$ باشد، آن‌گاه $b-a$ کدام است؟ بارم: ۱

۱۰) تشریحی ۱۳۹۸ — دشوار

تابع $f(x)=\frac{3x^2+ax+b}{2x^2+cx+d}$، یک تابع ثابت با ضابطه $y=k$ و دامنه $\mathbb{R}-\{-3\}$ است. حاصل $\frac{a-b+c-d}{k}$ کدام است؟ بارم: ۱

۱۱) تشریحی ۱۳۹۶ — دشوار

اگر f^{-1} وارون تابع $\begin{cases} f:(-\infty\,,-1]\to R \\ f(x)=x^2+2x+4 \end{cases}$ باشد، مجموع جواب‌های حقیقی معادله $f^{-1}(x)=x+2$ کدام است؟ بارم: ۱

(۱۲) تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

حاصل $M = \left[\dfrac{\left[\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}\right]}{\left[\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right]}\right]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

بارم: ۱

(۱۳) تشریحی ۱۳۹۷ دشوار

دو تابع $f(x) = \dfrac{b}{x+3}$ و $g(x) = \dfrac{x-a}{x^2+cx+d}$ برابرند. حاصل $\dfrac{abc}{d}$ کدام است؟

بارم: ۱

(۱۴) تشریحی ۱۳۹۶ دشوار

اگر توابع $f(x) = \sqrt{(x-a)^2(x-b)}$ و $g(x) = |x-a|\sqrt{x+2}$ با هم برابر باشند، مقدار $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

بارم: ۱

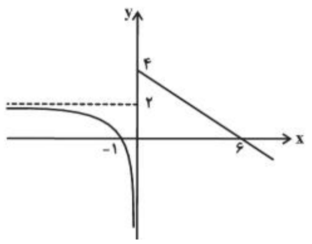
(۱۵) تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

معادله $[x^2-3x] = x^2-3x$ دارای چند جواب در بازه $[0, 2]$ است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

بارم: ۱

(۱۶) تشریحی ۱۳۹۶ دشوار

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به‌صورت مقابل باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{-f(x)+2}$ کدام است؟



بارم: ۱

(۱۷) تشریحی ۱۳۹۶ دشوار

برد تابع $f(x) = \sqrt{x^2-2x+5}+1$ شامل چند عدد طبیعی نمی‌شود؟

بارم: ۱

(۱۸) تشریحی ۱۳۹۷ دشوار

معادله $x^2 + [\frac{x}{3}] = 1$ چند جواب دارد؟

بارم: ۱

(۱۹) تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

اگر توابع $f(x) = \dfrac{x^2-(c-1)x+6-b}{x+a}$ و $g(x) = \dfrac{x^3+bx+2a}{x^2-a^2}$ برابر باشند، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

بارم: ۱

(۲۰) تشریحی ۱۳۹۶ دشوار

اگر دامنه‌ی تابع $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^2+mx+1}$ به ازای $m \in (a,b)$، مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

بارم: ۱

(۲۱) تشریحی ۱۳۹۹ دشوار

توابع $f(x) = x|x-2|$ و $g(x) = \begin{cases} x^2+ax & , \quad x \geq d \\ bx^2+cx & , \quad x < d \end{cases}$ با هم برابرند. حاصل $abcd$ کدام است؟

بارم: ۱

(۲۲) تشریحی ۱۳۹۶ دشوار

مساحت محصور بین تابع $y = [2x]$ و محورx ها در بازه $[0, \frac{5}{3}]$ کدام است؟

بارم: ۱

(۲۳) تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

تابع $f(x) = [x-2] + [x+\frac{5}{2}] - [x-\frac{3}{2}]$ در بازه $[-2, 3]$ به‌ترتیب از راست به چپ دارای چند مقدار متمایز است و مجموع این مقادیر کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

بارم: ۱

۲۴ تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

اگر مجموعه جواب معادله $[x+\frac{۱}{۴}]+[x-\frac{۱۱}{۴}]-۳=۰$ برابر $[a\ ,\ b)$ باشد. حاصل $b-a$ کدام است؟ ([ ] ، علامت جزء صحیح است.) بارم: ۱

۲۵ تشریحی ۱۳۹۶ دشوار

حاصل عبارت $[(\sqrt{۳}-۲)^{۱۰}]+[(۱-\sqrt{۲})^{۱۱}]+[(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})^{۱۲}]$ کدام است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.) بارم: ۱

۲۶ تشریحی ۱۳۹۶ دشوار

اگر تابع $f(x)=\frac{۱-x}{(m-۱)x^۲+۳x+۱}$ تنها به ازای یک مقدار x قابل تعریف نباشد، m چند مقدار می‌تواند اختیار کند؟ بارم: ۱

۲۷ تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

هزینه بازسازی یک واحد ساختمانی تخریب شده در زلزله بر حسب x درصد تخریب از تابع $P(x)=\frac{۴۰x}{۱۰۱-x}$ محاسبه می‌شود که $P(x)$ هزینه بازسازی برحسب میلیون تومان است. اگر ۱۲۱/۶۰۰/۰۰۰ تومان هزینه بازسازی یک واحد شده باشد، چند درصد از این واحد در زلزله تخریب شده است؟ بارم: ۱

۲۸ تشریحی قلمچی ۱۳۹۶ دشوار

الف) نمودار تابع $y=x[x]-۱$ را در بازهٔ $[-۲,۱)$ رسم کنید.

ب) برد این تابع را بنویسید. ([ ] نماد جزء صحیح است) بارم: ۱.۵

۲۹ تشریحی ۱۳۹۹ دشوار

مجموع مجذورهای صفرهای تابع $f(x)=x^۴-۴x^۳+x^۲+۶x+۲$ کدام است؟ بارم: ۱

۳۰ تشریحی ۱۳۹۳ دشوار

مجموعه‌ی جواب معادله‌ی $[x]+[۳x]=۰$، بازه‌ی $[a,b)$ است؛ مقدار $b-a$ کدام است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.) بارم: ۱

۳۱ تشریحی ۱۳۹۷ دشوار

دامنه تابع گویای $f(x)=\frac{x^۲+۳+\frac{۱}{x}}{x^۲+۶x+k}$ به صورت $D_f=\mathbb{R}-\{a\ ,\ b\}$ است. مقدار $|k+a+b|$ کدام است؟ بارم: ۱

۳۲ تشریحی ۱۳۹۳ دشوار

اگر جزء صحیح $(x^۲+x)$ برابر (۱-) باشد، آنگاه $[x^{۲۰}]$ کدام است؟ ([ ] ، علامت جزء صحیح است.) بارم: ۱

۳۳ تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

اگر دامنه تابع $f(x)=\frac{x^۳-۵x-k}{(k-۳)x^۲+k+۲}$ برابر مجموعه اعداد حقیقی باشد، مجموعه جواب محدوده k کدام است؟ بارم: ۱

۳۴ تشریحی ۱۳۹۷ دشوار

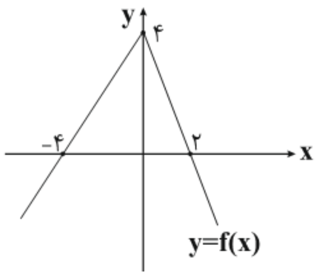
اگر دامنه تابع $f(x)=\frac{x+۲}{x^۲+ax-۱۲}$ به صورت $\mathbb{R}-\{b-۱\ ,\ -b\}$ باشد، تعداد اعداد صحیح بازه $[-۴a\ ,\ ۶a]$ که عضو دامنه تابع $g(x)=\frac{۱}{\sqrt{|x|-۴}}$ هستند، کدام است؟ بارم: ۱

۳۵ تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

اگر $f(x)=(x-۲)(۱-\frac{۱}{|x-۲|})$ باشد، به ازای چند مقدار صحیح k معادله $|f(x)|=k$ دارای ۳ جواب است؟ بارم: ۱

۳۶) تشریحی ۱۳۹۶ دشوار

اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر باشد، دامنه تابع با ضابطه $g(x)=\sqrt{۲-|f(x)|}$ کدام است؟ بارم: ۱



۳۷) تشریحی ۱۳۹۳ دشوار

مجموع جواب معادله ی $[x]-[-x]=۳$ کدام است؟ ([ ]: جزء صحیح) بارم: ۱

۳۸) تشریحی ۱۳۹۹ دشوار

دامنه تابع $f(x)=\dfrac{۲x}{۳x^{۲}+ax+b}$ به‌صورت $R-\{۱,۲\}$ است. دامنه تابع $g(x)=\dfrac{۱}{x+b}+\dfrac{۱}{x+a}$ کدام است؟ بارم: ۱

۳۹) تشریحی قلمچی ۱۳۹۷ دشوار

نمودار تابع $y=\left[\frac{۱}{۲}x-۱\right]$ را در بازه [۲و۱-) رسم کنید. ([ ] نماد جزء صحیح است) بارم: ۱.۲۵

۴۰) تشریحی ۱۳۹۶ دشوار

اگر x عددی صحیح باشد، حاصل $(x^{۲}+۲)-\left[\dfrac{۳x^{۲}-۱}{۳}\right]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.) بارم: ۱

۴۱) تشریحی ۱۳۹۳ دشوار

مجموعه‌ی جواب معادله‌ی $۴^{۱-[x]}=\left(\frac{۱}{۸}\right)^{[x]}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.) بارم: ۱

۴۲) تشریحی ۱۳۹۹ دشوار

حاصل $\left[\sqrt{۴+\sqrt{۷}}+\sqrt{۴-\sqrt{۷}}\right]$ برابر کدام است؟ ([]، علامت جزء صحیح است.) بارم: ۱

۴۳) تشریحی ۱۳۹۷ دشوار

توابع $f(x)=(x-۱)|x|$ و $g(x)=|x-۱|-۲x$ به‌ترتیب چگونه‌اند؟ بارم: ۱

۴۴) تشریحی ۱۳۹۶ دشوار

اگر $f(x)=\frac{۲}{۳}x+a$ باشد و نمودار $f^{-۱}$ از نقطه $(۲,۶)$ بگذرد، مقدار $f^{-۱}(۰)$ کدام است؟ بارم: ۱

۴۵) تشریحی ۱۳۹۶ دشوار

در تابع خطی f، اگر $f(۲)=-۱$ و $f^{-۱}(۱)=۰$، مقدار $f(-۲)+f^{-۱}(-۲)$ کدام است؟ بارم: ۱

۴۶) تشریحی ۱۳۹۹ دشوار

اگر $f(x)=۲x^{۳}+۱۱$، آنگاه $f^{-۱}(۲۷)$ کدام است؟ بارم: ۱

۴۷) تشریحی ۱۳۹۶ دشوار

اگر $f(x)=\begin{cases}۲x-۱ & , \quad x\leq ۰\\ x-۱ & , \quad x>۰\end{cases}$ باشد، مقدار $f^{-۱}(۲)+f^{-۱}(-۲)$ کدام است؟ بارم: ۱

۴۸) تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

تابع خطی f مفروض است. اگر نمودار تابع f محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲ و نمودار $f^{-۱}$ را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کند، حاصل $f^{-۱}(-۳)$ کدام است؟ بارم: ۱

۴۹) تشریحی ۱۳۹۸ — دشوار

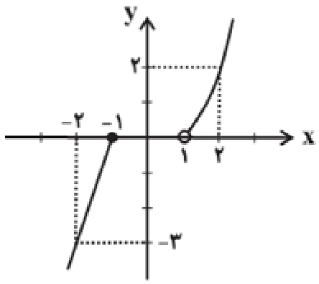
نمودار تابع خطی f و وارون f از نقطه $(-۲,۴)$ عبور می‌کنند. تابع $f^{-۱}$ محور xها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟ بارم: ۱

۵۰) تشریحی ۱۳۹۷ — دشوار

اگر دامنه و برد تابع یک‌به‌یک f برابر با R و جواب نامعادله $f(x) \leq x$ به صورت $[۴\,,\,+\infty)$ باشد، دامنه عبارت $\sqrt{f^{-۱}(x) - f(x)}$ کدام است؟ بارم: ۱

۵۱) تشریحی ۱۳۹۶ — دشوار

نمودار $y = f(x+۲)$ داده شده است. حاصل عبارت $A = \dfrac{f^{-۱}(۰) + f^{-۱}(۲)}{۱ + f^{-۱}(-۳)}$ کدام است؟ بارم: ۱



۵۲) تشریحی ۱۳۹۶ — دشوار

اگر محل برخورد نمودار تابع $f(x) = ۲x - |x| + ۱$ با نمودار تابع وارونش نقطه $A(a\,,\,b)$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟ بارم: ۱

۵۳) تشریحی ۱۳۹۶ — دشوار

وارون تابع $f(x) = \dfrac{۱-\sqrt{x}}{۲}$، کدام است؟ بارم: ۱

۵۴) تشریحی ۱۳۹۷ — دشوار

به ازای چند مقدار a، وارون تابع $f(x) = ax + b$ محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند و تابع $g = \{(b,۴),(۲,a),(-۲a,a^۲),(۸,۱۶)\}$ یک به یک است؟ بارم: ۱

۵۵) تشریحی ۱۳۹۸ — دشوار

اگر f تابعی خطی و $f(x) = f^{-۱}(x) + ۴$ باشد، مقدار $f(۴)$ کدام است؟ بارم: ۱

۵۶) تشریحی ۱۳۹۶ — دشوار

به ازای چه حدودی از a، تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲+a & ; \quad x>۲ \\ x+۲ & ; \quad x\leq ۲ \end{cases}$ یک‌به‌یک <u>نیست</u>؟ بارم: ۱

۵۷) تشریحی ۱۳۹۸ — دشوار

به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع $f(x) = -x^۲ - ax + ۱$ در فاصله $[-۲,۱]$ یک‌به‌یک است؟ بارم: ۱

۵۸) تشریحی ۱۳۹۶ — دشوار

اگر نمودار تابع $f(x) = \dfrac{۲x+۲}{ax+b}$ بر نمودار تابع معکوس خود منطبق باشد، مقدار b چقدر است؟ $(a \neq ۰)$ بارم: ۱

۵۹) تشریحی ۱۳۹۸ — دشوار

تابع $f(x) = |۲x-۳| + ۱$ با دامنه $[-۱,۱]$ مفروض است. وارون تابع f کدام است؟ بارم: ۱

۶۰) تشریحی ۱۳۹۷ — دشوار

تابع $f(x) = |\frac{x}{۲} + a|$ در بازه $(-۲,۱)$ یک به یک است. حدود a کدام است؟ بارم: ۱

۶۱) تشریحی ۱۳۹۷ دشوار

اگر تابع $f(x) = |2x+a|-1$ در بازه $[-1\,,\,3]$ یک به یک باشد، محدوده a کدام است؟

بارم: ۱

۶۲) تشریحی ۱۳۹۷ دشوار

اگر $f^{-1} = \{(2,3),(1,-1),(0,2),(-1,0)\}$ باشد، آنگاه تابع $\frac{2f^{-1}}{f}$ شامل کدام زوج مرتب است؟

بارم: ۱

۶۳) تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

اگر توابع f و g وارونپذیر باشند و داشته باشیم: $f(3x-1) = 2g(x+2)-1$ و $g^{-1}(2) = 4$ مقدار $f^{-1}(3)$ کدام است؟

بارم: ۱

۶۴) تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

کم‌ترین مقدار k کدام باشد تا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+k & ,x<0 \\ -2x+3 & ,x\geq 0 \end{cases}$ یک‌به‌یک باشد؟

بارم: ۱

۶۵) تشریحی ۱۳۹۷ دشوار

اگر تابع $f(x) = ax+2$ با وارونش در بیش از یک نقطه تقاطع داشته باشند، مقدار $f^{-1}(3)$ کدام است؟

بارم: ۱

۶۶) تشریحی ۱۳۹۶ دشوار

تابع وارون تابع $y = x+\sqrt{x}$ به صورت $y = (\frac{\sqrt{ax+1}-1}{b})^2$ می‌باشد، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

بارم: ۱

۶۷) تشریحی ۱۳۹۹ دشوار

اگر $f^{-1}(x) = 3x-5$ باشد، آنگاه $f(\frac{2}{7})$ کدام است؟

بارم: ۱

۶۸) تشریحی ۱۳۹۷ دشوار

تابع $f(x) = |\frac{x}{2}+a|$ در بازه $(-2,1)$ یک به یک است. حدود a کدام است؟

بارم: ۱

۶۹) تشریحی ۱۳۹۷ دشوار

اگر $f(x) = x^2+|x|$ و $g(x) = \frac{1}{x}$، آنگاه برد تابع $(f.g)(x)$ چند عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟

بارم: ۱

۷۰) تشریحی ۱۳۹۶ دشوار

اگر $f(x) = \sqrt{n-3x}$ و $g(x) = \sqrt{x-3m}$ وتابع $f+g$ به صورت $\{(1,a)\}$ باشد، آن‌گاه مقدار $am+n$ کدام است؟

بارم: ۱

۷۱) تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

اگر $f(x) = \sqrt{x+a}-c$ و $g(x) = \sqrt{b-x}+d$ باشند و $D_{\frac{f}{g}} = [-1,4]-\{0\}$ و $(f+g)(3) = 5$ باشد، حاصل $a+b+c+d$ کدام است؟

بارم: ۱

۷۲) تشریحی ۱۳۹۹ دشوار

اگر تابع $f(x) = \sqrt{x-3}$ و $g = \{(2,-1),(4,4),(-1,5),(7,3)\}$، بیشترین مقدار تابع $2f+3g$ کدام است؟

بارم: ۱

۷۳) تشریحی ۱۳۹۶ دشوار

اگر $f(x) = \begin{cases} x & , x<-3 \\ 2x^2 & , x>1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x & , |x|<2 \\ \frac{1}{x} & , x<-5 \end{cases}$ باشد، تابع $f\times g$ کدام است؟

بارم: ۱

۷۴) تشریحی ۱۳۹۶ دشوار

توابع $f(x) = \frac{x+1}{x}$ و $g(x) = \frac{x^2+1}{x}$ مفروض‌اند. برد تابع $f-g$ کدام است؟

بارم: ۱

(۷۵) تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

اگر $f(x)=\frac{۳}{x-۱}$ و $g(x)=[x]$ باشند، تابع $\frac{f}{g}$ در چند نقطه با طول صحیح تعریف <u>نمی‌شود</u>؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.) بارم: ۱

(۷۶) تشریحی ۱۳۹۶ دشوار

f تابعی خطی با دامنه $[-۱,۳]$ است که از دو نقطه $(-۱,۲)$ و $(۱,۴)$ می‌گذرد. نمودار تابع $g(x)=f(x)+f^{-۱}(x)$ کدام است؟ بارم: ۱

(۷۷) تشریحی ۱۳۹۷ دشوار

برد تابع $f(x)=\frac{[x]}{\sqrt{x-x^۲}}$ شامل چند عدد صحیح است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.) بارم: ۱

(۷۸) تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

تابع $y=f(x)$ به گونه‌ای تعریف شده است که رابطه $f(x[x])=x+[x]$ برقرار است. مقدار $f(\frac{۱۷}{۴})$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.) بارم: ۱

(۷۹) تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

اگر $f(x)=\sqrt{۱-۲x}+\sqrt{x+۴}$ و $g(x)=\sqrt{x+۴}-\sqrt{۱-۲x}$ باشند، برد تابع f.g شامل چند عدد صحیح است؟ بارم: ۱

(۸۰) تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{(a-۱)x}{x-۱}$ نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم متقارن باشد، مقدار a کدام است؟ بارم: ۱

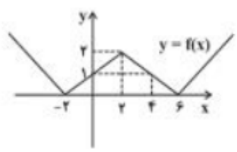
(۸۱) تشریحی ۱۳۹۹ دشوار

اگر توابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+۱} & , \quad x\geq ۳\\ x+۲ & , \quad x<۳\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-x^۲+۵ & , \quad x\geq ۱\\ \frac{۱}{x} & , \quad x<۱\end{cases}$ بارم: ۱

مفروض باشند، آنگاه حاصل $[(۲f+\frac{g}{۳})(x)]$ در نقطه $x=g(\frac{۱}{۳})$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

(۸۲) تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

شکل مقابل مربوط به نمودار تابع $y=f(x)$ است. مساحت سطح محدود به نمودار تابع $y=[f(x)]$ و محورها در بازه $[-۲,۶]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.) بارم: ۱



(۸۳) تشریحی ۱۳۹۷ دشوار

اگر تابع $f=\left\{(\frac{۴}{k},۲),(۱,۴),(k+۳,۲),(۳,k+۳)\right\}$ وارون‌پذیر و $g(x)=\left[\frac{x}{۲}-۲\right]$ باشد، مقدار $(f-g)(-k-۱)$ کدام است؟ بارم: ۱

([ ]، نماد جزء صحیح است.)

(۸۴) تشریحی ۱۳۹۵ دشوار

اگر $f(x)=\sqrt{۱-x}$، آن‌گاه دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{۱+f^{-۱}of(x)}$ کدام است؟ بارم: ۱

(۸۵) تشریحی ۱۳۹۵ دشوار

اگر $f(x)=e^{x\ln ۲}$ باشد، معادله‌ی $fof^{-۱}(x)=x^۲$ چند جواب حقیقی دارد؟ بارم: ۱

۸۶ تشریحی ۱۳۹۹ دشوار

فرض کنید $f(x)=x^2-3x$ و $g(x)=7x+2$ باشد. در این‌صورت حاصل $(f+g)(\sqrt{5}-2)$ کدام است؟ بارم: ۱

۸۷ تشریحی ۱۳۹۶ دشوار

اگر $f(x)=\sqrt{x+3}$، $g(x)=\sqrt{a-x}+2b$، $D_{f-g}=[-3,10]$ و $(f+g)(6)=6$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟ بارم: ۱

۸۸ تشریحی قلمچی ۱۳۹۹ دشوار

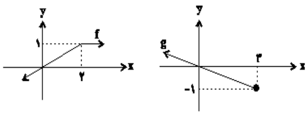
نمودار تابع $y=2\sqrt{4x-1}+1$ را ابتدا در امتداد محور xها ۲ واحد به سمت راست می بریم سپس در امتداد محور xها با ضریب ۲ منبسط می کنیم و در پایان، نمودار حاصل را در امتداد محور yها ۲ واحد پایین می بریم. ضابطهٔ تابع حاصل را بنویسید. بارم: ۲

۸۹ تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

اگر $f=\{(1\,,\,m)\,,\,(2\,,\,n)\,,\,(-1\,,\,p)\}$ ، $g=\{(2\,,\,a)\,,\,(-1\,,\,b)\,,\,(4,\,z)\}$ ، $(\frac{2f+g}{f\,.\,g})(2)=-\frac{1}{2}$ و $(\frac{f-g}{2f\,.\,g})(2)=\frac{5}{8}$ باشد، مقدار $(\frac{f}{g})(2)$ کدام است؟ بارم: ۱

۹۰ تشریحی ۱۳۹۹ دشوار

با توجه به نمودارهای توابع f و g، مساحت محصور به نمودار تابع $f+g$ و جهت مثبت محورهای x کدام است؟ بارم: ۱

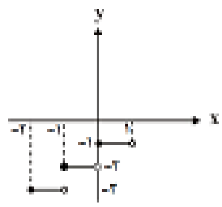


سوال ۱ گزینه درست: null تشریحی قلمچی ۱۳۹۶ دشوار

$$-2\le x<1=\begin{cases}-2\le x<-1\to -3\le x-1<-2\to y_1=y_2=-3\\ -1\le x<0\to -2\le x-1<y_1=y_2=-2\\ 0\le x<1\to -1\le x-1<0\to y_1=y_2=-1\end{cases}$$

دو تابع با هم مساویند.

یعنی عدد صحیح را می توان از داخل جزء صحیح خارج کرد.



سوال ۲ گزینه درست: null تشریحی ۱۳۹۷ دشوار

$$\frac{17}{3}<[x]\xrightarrow{[x]\in\mathbb{Z}}6\le[x]\ ,\ (1)$$

$$[x]<\frac{13}{2}\xrightarrow{[x]\in\mathbb{Z}}[x]\le 6\ ,\ (2)$$

$$\xrightarrow{1\,,\,2}[x]=6\Rightarrow 6\le x<7\xrightarrow{\times(-2)}-12\ge -2x>-14$$

$[-2x]=-12$ یا ۱۳- یا ۱۴-

سوال ۳ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

ابتدا توجه کنید که:

$$[\sqrt{۱}]=[\sqrt{۲}]=[\sqrt{۳}]=۱$$

$$[\sqrt{۴}]=[\sqrt{۵}]=[\sqrt{۶}]=[\sqrt{۷}]=[\sqrt{۸}]=۲$$

$$[\sqrt{۹}]=[\sqrt{۱۰}]=۳$$

بنابراین:

$$f(۱)+f(۲)+\ldots+f(۱۰)=(۱-[\sqrt{۱}])+(۲-[\sqrt{۲}])$$

$$+\ldots+(۱۰-[\sqrt{۱۰}])$$

$$=(۱+۲+\ldots+۱۰)-(۱+۱+۱+۲+۲+۲+۲+۲+۳+۳)$$

$$=\frac{۱۰}{۲}(۱+۱۰)-(۳+۱۰+۶)=۳۶$$

سوال ۴ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۳ | دشوار

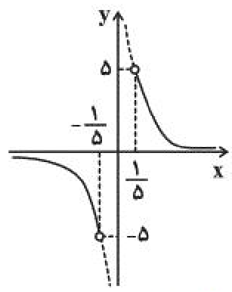
$$[\frac{۱-x}{x}]=۱\Rightarrow ۱\le\frac{۱-x}{x}<۲\Rightarrow ۱\le\frac{۱}{x}-۱<۲\xrightarrow{+۱}۲\le\frac{۱}{x}<۳$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}\ge\frac{۱}{\frac{۱}{x}}>\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{۱}{۳}<x\le\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\times(-۶)}-۲>-۶x\ge-۳\Rightarrow[-۶x]=-۳$$

با توجه به توضیحات بالا، اگر $[\frac{۱-x}{x}]=۱$، آن‌گاه $[-۶x]=-۳$، یعنی برای $[-۶x]$، تنها یک مقدار امکان‌پذیر است.

سوال ۵ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | دشوار

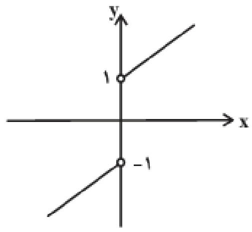
نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



$$\Rightarrow R_f=(-۵\ ,\ ۵)-\{۰\}$$

برد این تابع شامل ۸ عدد صحیح ±۱ ، ±۲، ±۳ و ±۴ است.

سوال ۶ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

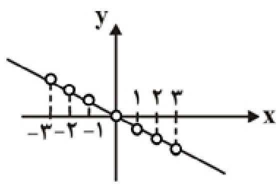


$$f(x)=x+\frac{x}{|x|}=\begin{cases}x+۱ & x>۰\\ x-۱ & x<۰\end{cases}$$
$$\Rightarrow A=R_f=R-[-۱,۱]$$
$$g(x)=x^۲-۶x=(x-۳)^۲-۹\Rightarrow g(x)\geq -۹$$
$$\Rightarrow B=R_g=[-۹,+\infty)$$

$B-A=[-۱,۱]\Rightarrow$ شامل سه عدد صحیح ۱ و ۰ و -۱ است.

سوال ۷ | گزینه درست: null | تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۶ | دشوار

می‌دانیم



$$[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in z\\ -۱ & x\notin z\end{cases}$$
$$\Rightarrow x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\to f(x)=\frac{x}{-۱}=-x$$
$$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\mathbb{Z}\ \ ,\ \ R_f=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$$

سوال ۸ | گزینه درست: null | سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ | دشوار

با توجه به نمودار، قد جنین با یک تابع خطی به سن او وابسته می‌شود که این خط از دو نقطه‌ی $A(۱۲,۱۱/۵)$ و $B(۱۴,۱۴/۵)$ می‌گذرد، اگر سن برحسب هفته را با x و قد برحسب سانتی‌متر را با y نمایش دهیم، معادله‌ی این خط به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$y-y_A=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A)$$
$$\Rightarrow\ y-۱۱/۵=\frac{۱۴/۵-۱۱/۵}{۱۴-۱۲}(x-۱۲)$$
$$\Rightarrow\ y-۱۱/۵=۱/۵(x-۱۲)$$
$$\Rightarrow\ y=۱/۵x-۱۸+۱۱/۵\ \Rightarrow\ y=۱/۵x-۶/۵\ \ (*)$$

الف) از معادله‌ی $(*)$ باید مقدار y را به ازای $x=۱۷$ به‌دست آوریم:

$$y=۱/۵\times ۱۷-۶/۵=۱۹$$

یعنی در انتهای هفته‌ی هفدهم طول قد جنین نوزده سانتی‌متر است.

ب) در معادله‌ی $y=۱/۵x-۶/۵$ باید مشخص کنیم به ازای چه مقداری از x، مقدار y برابر با ۲۵ می‌شود:

$$۲۵=۱/۵x-۶/۵\ \Rightarrow\ ۳۱/۵=۱/۵x$$
$$\Rightarrow\ x=\frac{۳۱/۵}{۱/۵}=۲۱$$

سوال ۹ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۹ | دشوار

می‌دانیم: $۰ \leq x-[x] < ۱$. بنابراین داریم:

$$f(x)=x-۵[\frac{x}{۵}]+۳=۵(\frac{x}{۵}-[\frac{x}{۵}])+۳$$

$$\Rightarrow ۰\leq \frac{x}{۵}-[\frac{x}{۵}]<۱ \xrightarrow{\times ۵} ۰\leq ۵(\frac{x}{۵}-[\frac{x}{۵}])<۵$$

$$\xrightarrow{+۳} ۳\leq R_f<۸$$

درنتیجه: $a=۳\,,\,b=۸\Rightarrow b-a=۸-۳=۵$

سوال ۱۰ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | دشوار

دامنه تابع، $\mathbb{R}-\{-۳\}$ است، پس $x=-۳$ تنها ریشه مخرج کسر است. از آن‌جا که مخرج به صورت یک عبارت درجه دوم است؛

پس باید ریشه مضاعف $x=-۳$ داشته باشد، به عبارتی به صورت $A(x+۳)^۲$ در بیاید. از مقایسه عبارت $۲x^۲+cx+d$ با عبارت $A\underbrace{(x+۳)^۲}_{x^۲+۶x+۹}$

واضح است که $A=۲$ بوده و درنتیجه $c=۱۲$ و $d=۱۸$ خواهد بود.

حال دقت کنید که تابع $f(x)=\dfrac{۳x^۲+ax+b}{۲x^۲+۱۲x+۱۸}$ قرار است یک تابع ثابت شود. برای این منظور باید صورت کسر به صورت ضریبی از مخرج در آید، با مقایسه جملات اول صورت و مخرج، مشخص می‌شود که صورت قرار است $\frac{۳}{۲}$ برابر مخرج باشد، پس این نسبت در بقیه جملات صورت و مخرج نیز برقرار است، یعنی:

$$\begin{cases} a=\frac{۳}{۲}(۱۲)=۱۸ \\ b=\frac{۳}{۲}(۱۸)=۲۷ \end{cases}$$

و نهایتاً تابع به صورت تابع ثابت $y=\frac{۳}{۲}$ با دامنه $\mathbb{R}-\{-۳\}$ خواهد بود.

پس: $$\frac{a-b+c-d}{k}=\frac{۱۸-۲۷+۱۲-۱۸}{\frac{۳}{۲}}=\frac{-۱۵}{\frac{۳}{۲}}=-۱۰$$

سوال ۱۱ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

وارون f را به‌دست می‌آوریم:

$$y=x^۲+۲x+۴\Rightarrow y=(x+۱)^۲+۳\Rightarrow (x+۱)^۲=y-۳$$

$$\Rightarrow |x+۱|=\sqrt{y-۳}\xrightarrow{x\leq -۱} -x-۱=\sqrt{y-۳}\Rightarrow x=-\sqrt{y-۳}-۱$$

پس ضابطه $f^{-۱}$ به‌صورت روبه‌رو است: $f^{-۱}(x)=-\sqrt{x-۳}-۱$

اکنون معادله زیر را حل می‌کنیم:

$$f^{-۱}(x)=x+۲\Rightarrow -\sqrt{x-۳}-۱=x+۲$$

$$\Rightarrow -\sqrt{x-۳}=x+۳\xrightarrow{\text{توان ۲}} x-۳=x^۲+۶x+۹$$

$$\Rightarrow x^۲+۵x+۱۲=۰$$

معادله جواب ندارد $(\Delta<۰)$.

سوال ۱۲ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | دشوار

$$\frac{۳+۲\sqrt{۲}}{۳-۲\sqrt{۲}}\times\frac{۳+۲\sqrt{۲}}{۳+۲\sqrt{۲}}=(۳+۲\sqrt{۲})^{۲}=۱۷+۱۲\sqrt{۲}$$

$$۱۶<۱۲\sqrt{۲}<۱۷\Rightarrow A=\left[\frac{۳+۲\sqrt{۲}}{۳-۲\sqrt{۲}}\right]=[۱۷+۱۲\sqrt{۲}]$$

$$=۱۷+[۱۲\sqrt{۲}]=۳۳$$

$$\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}-۱}\times\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}+۱}=(\sqrt{۲}+۱)^{۲}=۳+۲\sqrt{۲}$$

$$۲<۲\sqrt{۲}<۳\Rightarrow B=\left[\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}-۱}\right]=[۳+۲\sqrt{۲}]$$

$$=۳+[۲\sqrt{۲}]=۵\Rightarrow M=[\frac{A}{B}]=[\frac{۳۳}{۵}]=[۶/۶]=۶$$

سوال ۱۳ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۷ | دشوار

دو تابع را برابر در نظر می‌گیریم. البته دقت داریم که $D_f=R-\{-۳\}$ است پس مخرج g باید فقط یک ریشه ۳- داشته باشد تا دامنه‌ها برابر شوند، یعنی باید $(x+۳)^{۲}$ باشد، پس باید مخرج $(x+۳)^{۲}=x^{۲}+۶x+۹$ باشد یعنی: $c=۶$ و $d=۹$،

$$f(x)=g(x)\Rightarrow\frac{x-a}{(x+۳)^{۲}}=\frac{b}{x+۳}\xrightarrow{x\neq-۳}\frac{x-a}{x+۳}=\frac{b}{۱}$$

$$\Rightarrow x-a=bx+۳b\Rightarrow\begin{cases}b=۱\\a=-۳\end{cases}$$

پس:

$$\frac{abc}{d}=\frac{(-۳)(۱)(۶)}{۹}=\frac{-۱۸}{۹}=-۲$$

سوال ۱۴ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

از تساوی f و g نتیجه می‌گیریم که $b=-۲$. برای انتخاب a باید حواسمان به دامنه دو تابع باشد. دامنه تابع f را در دو حالت زیر به‌دست می‌آوریم:

۱) $a\geq-۲$

$$D_f=[-۲,+\infty)$$

x		$b=-۲$		a	
$(x-a)^{۲}(x-b)$	$-$	۰	$+$	۰	$+$

۲) $a<-۲$

$$D_f=\{a\}\bigcup[-۲,+\infty)$$

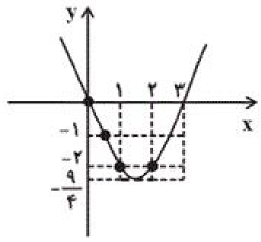
x		a		$b=-۲$	
$(x-a)^{۲}(x-b)$	$-$	۰	$-$	۰	$+$

از طرفی چون $D_g=[-۲,+\infty)$ است، پس برای آن‌که $D_f=D_g$ باشد، باید $a\in[-۲,+\infty)$ باشد، پس:

$$a\geq-۲\xrightarrow{+b}a+b\geq\underbrace{-۲+b}_{-۴}\Rightarrow a+b\geq-۴$$

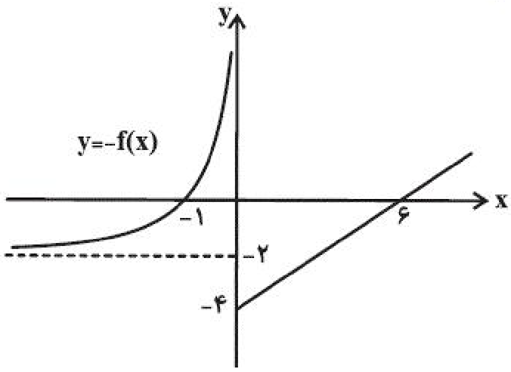
سوال ۱۵ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | دشوار

در شکل زیر نمودار تابع $y=x^۲-۳x$ رسم شده است. معادله $[x^۲-۳x]=x^۲-۳x$ متناظر است با مقادیر صحیح $x^۲-۳x$. با توجه به بازه $[۰\,,۲]$ به ۴ جواب خواهیم رسید. دقت کنید به ازای $x=۰$، $x=۱$، $x=۲$ و عددی بین صفر و یک، مقدار $x^۲-۳x$ عدد صحیح خواهد بود.

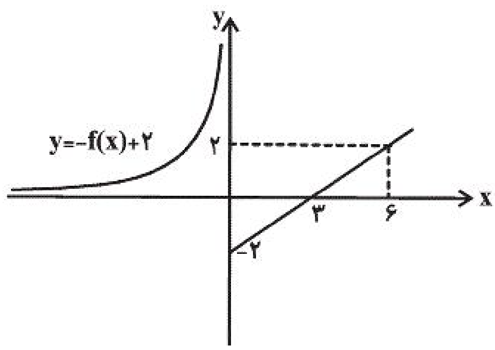


سوال ۱۶ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

ابتدا نمودار تابع $y=-f(x)$ را رسم می‌کنیم (باید نمودار $f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم)



اکنون نمودار تابع $y=-f(x)$ را ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار $y=-f(x)+۲$ به‌دست آید. چون $-f(x)+۲$، زیر رادیکال است، نقاطی از تابع $y=-f(x)+۲$ جزء دامنه تابع مورد سؤال است که در آن $-f(x)+۲\geq ۰$ باشد.



$\Rightarrow D=(-\infty\,,۰)\bigcup[۳\,,+\infty)$

سوال ۱۷ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

ابتدا عبارت زیر رادیکال را به فرم مربع کامل تبدیل می‌کنیم و سپس با مشخص کردن محدوده عبارت زیر رادیکال، برد تابع را به دست می‌آوریم.

$$x^2-2x+5=\underbrace{x^2-2x+1}_{(x-1)^2}+4=(x-1)^2+4$$

$$(x-1)^2\geq 0\xrightarrow{+4}(x-1)^2+4\geq 4\Rightarrow\sqrt{(x-1)^2+4}\geq 2$$

$$\xrightarrow{+1}\sqrt{(x-1)^2+4}+1\geq 3\Rightarrow f(x)\geq 3\Rightarrow R_f=[3,+\infty)$$

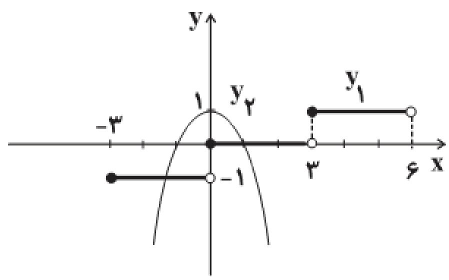
بنابراین برد تابع بازه $[3,+\infty)$ می‌باشد و اعداد طبیعی ۱ و ۲ را شامل نمی‌شود.

سوال ۱۸ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۷ | دشوار

معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$x^2+[\frac{x}{3}]=1\Rightarrow[\frac{x}{3}]=1-x^2$$

حالا نمودار دو تابع $y_1=[\frac{x}{3}]$ و $y_2=1-x^2$ را رسم می‌کنیم:



$$y_1=[\frac{x}{3}]=\begin{cases}\vdots & \\ 1 & 3\leq x<6\\ 0 & 0\leq x<3\\ -1 & -3\leq x<0\\ \vdots & \end{cases}$$

دو تابع در دو نقطه متقاطع‌اند پس معادله ۲ جواب دارد.

سوال ۱۹ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | دشوار

ابتدا باید دامنه توابع برابر باشد:

$$D_g:\mathbb{R}-\{\pm a\}\qquad،\qquad D_f:\mathbb{R}-\{-a\}$$

که برای برابر بودن دامنه‌ها، a باید صفر باشد.

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{x^2-(c-1)x+6-b}{x}\\ g(x)=\dfrac{x^3+bx}{x^2}\end{cases}\Rightarrow\frac{x^2-(c-1)x+6-b}{x}=\frac{x^3+bx}{x^2}$$

$$\Rightarrow x^4-(c-1)x^3+(6-b)x^2=x^4+bx^2\Rightarrow\begin{cases}c-1=0\Rightarrow c=1\\ 6-b=b\Rightarrow b=3\end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b+c=0+3+1=4$$

سوال ۲۰ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

چون $D_f = R$ یعنی مخرج تابع ریشه‌ی حقیقی ندارد و چون مخرج چند جمله‌ای درجه‌ی دوم است، پس باید دلتای معادله‌ی $x^۲ + mx + ۱ = ۰$ منفی باشد، در نتیجه:

$$b^۲ - ۴ac < ۰ \Rightarrow m^۲ - ۴ \times (۱) \times (۱) < ۰$$

$$\Rightarrow m^۲ < ۴ \Rightarrow -۲ < m < ۲$$

$$\Rightarrow \max(b-a) = ۲ - (-۲) = ۴$$

سوال ۲۱ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۹ | دشوار

چون دو تابع f و g برابرند، پس دامنه دو تابع برابر است. یعنی:

$$D_f = D_g = R$$

از طرفی به ازای هرعضو x اعداد حقیقی $f(x) = g(x)$ در نتیجه:

$$f(x) = \begin{cases} x(x-۲) & , \quad x \geq ۲ \\ -x(x-۲) & , \quad x < ۲ \end{cases} = \begin{cases} x^۲ - ۲x & , \quad x \geq ۲ \\ -x^۲ + ۲x & , \quad x < ۲ \end{cases}$$

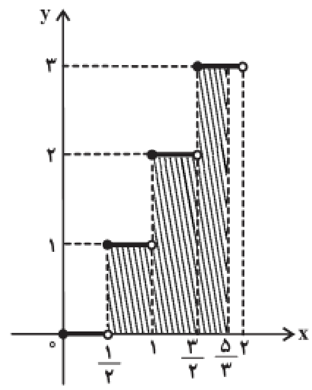
$$= \begin{cases} x^۲ + ax & , \quad x \geq d \\ bx^۲ + cx & , \quad x < d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۲ \\ b = -۱ \\ c = ۲ \\ d = ۲ \end{cases} \Rightarrow abcd = ۸$$

سوال ۲۲ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

تابع $y=[2x]$ را می‌توان به صورت تابع چندضابطه‌ای زیر نوشت:

$$y=\begin{cases} \vdots & \vdots \\ 3 & \frac{3}{2}\leq x<2 \\ 2 & 1\leq x<\frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2}\leq x<1 \\ 0 & 0\leq x<\frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

نمودار $y=[2x]$ را رسم می‌کنیم:



$$S=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+3\times(\frac{5}{3}-\frac{3}{2})=\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}=2$$

سوال ۲۳ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | دشوار

$$f(x)=[x]-2+[x-\frac{3}{2}+\frac{8}{2}]-[x-\frac{3}{2}]$$

$$=[x]-2+[x-\frac{3}{2}]+4-[x-\frac{3}{2}]=[x]+2$$

$$-2\leq x<-1\rightarrow f(x)=0$$

$$-1\leq x<0\rightarrow f(x)=1$$

$$0\leq x<1\rightarrow f(x)=2$$

$$1\leq x<2\rightarrow f(x)=3$$

$$2\leq x<3\rightarrow f(x)=4$$

$$x=3\rightarrow f(x)=5$$

دارای ۶ مقدار متمایز است. $0+1+2+3+4+5=15$

سوال ۲۴ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | دشوار

$$[x+\frac{۱}{۴}]+[x-\frac{۱۱}{۴}]=۳ \Rightarrow [x+\frac{۱}{۴}]+[x+\frac{۱}{۴}-\frac{۱۲}{۴}]=۳$$

$$[x+\frac{۱}{۴}]+[x+\frac{۱}{۴}-۳]=۳ \Rightarrow [x+\frac{۱}{۴}]+[x+\frac{۱}{۴}]-۳=۳$$

$$\Rightarrow ۲[x+\frac{۱}{۴}]=۶ \Rightarrow [x+\frac{۱}{۴}]=۳$$

$$۳ \le x+\frac{۱}{۴} < ۴ \Rightarrow ۳-\frac{۱}{۴} \le x < ۴-\frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{۱۱}{۴} \le x < \frac{۱۵}{۴}$$

جواب معادله، بازه $[\frac{۱۱}{۴}\ ,\ \frac{۱۵}{۴})$ است. پس $b=\frac{۱۵}{۴}$ و $a=\frac{۱۱}{۴}$ است.

$$\Rightarrow b-a=\frac{۱۵}{۴}-\frac{۱۱}{۴}=\frac{۴}{۴}=۱$$

سوال ۲۵ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

به‌جای $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۲}$ به‌ترتیب مقادیر تقریبی ۱/۷ و ۱/۴ را جایگذاری می‌کنیم:

$$[(۱/۷-۲)^{۱۰}]+[(۱-۱/۴)^{۱۱}]+[(۱/۴-۱/۷)^{۱۲}]$$

$$=[۰^+]+[۰^-]+[۰^+]=-۱$$

توجه کنید که منظور ما از ۰^+ عددی نزدیک به صفر در بازه‌ی $(۰,۱)$ و منظور از ۰^- عددی نزدیک به صفر در بازه‌ی $(-۱,۰)$ است.

سوال ۲۶ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

دو حالت رخ می‌دهد.

۱) مخرج از درجه یک باشد (یعنی $m=۱$).

$$D_f=R-\{-\frac{۱}{۳}\}$$

۲) ریشه مخرج مضاعف باشد.

$$۹-۴(۱)(m-۱)=۰ \Rightarrow m=\frac{۱۳}{۴}$$

سوال ۲۷ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | دشوار

$۱۲۱/۶۰۰/۰۰۰=۱۲۱/۶$ میلیون تومان تومان

$$\Rightarrow \frac{۴۰x}{۱۰۱-x}=۱۲۱/۶$$

$$\Rightarrow ۴۰x=۱۲۲۸۱/۶-۱۲۱/۶x \Rightarrow ۱۶۱/۶x=۱۲۲۸۱/۶$$

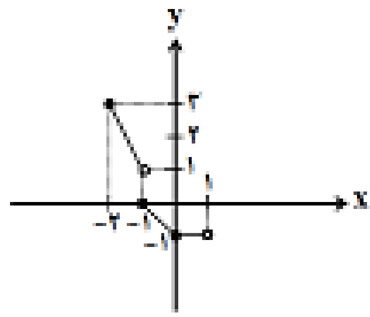
$$\Rightarrow x=\frac{۱۲۲۸۱/۶}{۱۶۱/۶}=۷۶ \quad \text{درصد}$$

سوال ۲۸ | گزینه درست: null | تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۶ | دشوار

الف)

$$-2 \le x < 1 \Rightarrow \quad -2 \le x < -1 \to y = -2x - 1, (-2,3), (-1,1)$$
$$-1 \le x < 0 \to y = -x - 1, (-1,0), (0,-1)$$
$$0 \le x < 1 \to y = -1$$

ب) برد= $[-1,0] \cup (1,3]$



سوال ۲۹ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۹ | دشوار

با اضافه و کم کردن $4x^2$ به ضابطه $f(x)$ داریم:

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x^2 + x^2 + 6x + 2$$

$$= (x^2 - 2x)^2 - 3x^2 + 6x + 2$$

مشاهده می‌کنیم که در قسمت دوم ضابطه، می‌توانیم $x^2 - 2x$ را ایجاد کنیم، داریم

$$f(x) = (x^2 - 2x)^2 - 3(x^2 - 2x) + 2$$

برای حل معادله $f(x) = 0$، قرار می‌دهیم:

$$t = x^2 - 2x \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t = 1 \quad t = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \\ \text{مجموع مجذورهای صفرها} \quad = S^2 - 2P = 4 + 2 = 6 \\ t = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow \\ \text{مجموع مجذورهای صفرها} \quad = S^2 - 2P = 4 + 4 = 8 \end{cases}$$

$\Rightarrow$مجموع مجذورهای صفرهای تابع$= 6 + 8 = 14$

سوال ۳۰ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۳ | دشوار

چون همواره $[x].[3x] \ge 0$ ، پس مجموع $[x]$ و $[3x]$ زمانی صفر است که هر دو برابر صفر باشند:

$$[x] + [3x] = 0 \Rightarrow \begin{cases} [x] = 0 \Rightarrow 0 \le x < 1 \quad (*) \\ [3x] = 0 \Rightarrow 0 \le 3x < 1 \Rightarrow 0 \le x < \frac{1}{3} \quad (**) \end{cases}$$

از اشتراک نامعادله‌های $(*)$ و $(**)$، مجموعه‌ی جواب معادله، بازه‌ی $[0, \frac{1}{3})$ است، پس $a = 0$ و $b = \frac{1}{3}$، بنابراین $b - a = \frac{1}{3}$.

سوال ۳۱ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۷ | دشوار

دامنه تابع $f(x)=\dfrac{x^۲+۳+\frac{۱}{x}}{x^۲+۶x+k}$، عدد صفر را شامل نمی‌شود، پس یکی از اعداد a و b برابر با صفر است. (مثلاً $a=۰$) با توجه به این‌که فقط یک عدد دیگر (b) در دامنه تابع f وجود ندارد، دو حالت به وجود می‌آید:

۱) مخرج ریشه مضاعف دارد:

$$\Delta_{\text{مخرج}}=۰\Rightarrow ۳۶-۴k=۰\Rightarrow k=۹$$

حال مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا b به‌دست آید:

$$x^۲+۶x+۹=۰\Rightarrow (x+۳)^۲=۰\Rightarrow x=-۳\Rightarrow b=-۳$$

$$\Rightarrow |k+a+b| = |۹+۰+(-۳)| =۶$$

۲) مخرج دو ریشه دارد که یکی از آن‌ها صفر است:

$$\text{ریشه مخرج است } x=۰\Rightarrow ۰^۲+۶(۰)+k=۰\Rightarrow k=۰$$

حال با جای‌گذاری $k=۰$، ریشه دیگر مخرج را حساب می‌کنیم:

$$x^۲+۶x=۰\Rightarrow x(x+۶)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=-۶\Rightarrow b=-۶\end{cases}$$

$$\Rightarrow |k+a+b| = |۰+۰+(-۶)| =۶$$

سوال ۳۲ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۳ | دشوار

می‌دانیم که اگر $[u]=k$، $k\in Z$ آنگاه $k\le u<k+۱$، پس:

$$[x^۲+x]=-۱ \ \Rightarrow\ -۱\le x^۲+x<۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۱\le x^۲+x \ \Rightarrow\ x^۲+x+۱\ge ۰ \text{ همواره برقرار (چرا؟)} \\ x^۲+x<۰ \ \Rightarrow\ x(x+۱)<۰\Rightarrow -۱<x<۰\end{cases}$$

یعنی از $[x^۲+x]=-۱$، نتیجه می‌شود که $-۱<x<۰$، پس:

$$-۱<x<۰ \ \Rightarrow\ ۰<x^{۲۰}<۱ \ \Rightarrow\ [x^{۲۰}]=۰$$

سوال ۳۳ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | دشوار

برای اینکه دامنه تابع f برابر R شود، دو حالت زیر امکان‌پذیر است:

۱) مخرج، تابعی ثابت باشد که فاقد ریشه خواهد بود، که باید:

$$\Rightarrow k-۳=۰\Rightarrow k=۳$$

۲) مخرج، تابعی درجه دوم باشد و چون $b=۰$ بوده a، و c باید هم‌علامت باشند تا مخرج فاقد ریشه باشد:

$$\Rightarrow (k-۳)(k+۲)>۰\Rightarrow k\in(-\infty,-۲)\bigcup(۳,+\infty)$$

$$\Rightarrow \text{جواب نهایی}=(-\infty,-۲)\bigcup[۳,+\infty)$$

سوال ۳۴ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۷ | دشوار

می‌دانیم دامنه تابع گویای f به صورت:

$D_f = \mathbb{R} - \{$ریشه‌های مخرج$\}$ می‌باشد. بنابراین، $b-1$ و $-b$ ریشه‌های عبارت $x^۲ + ax - ۱۲$ هستند، حال از آنجایی که مجموع این ریشه‌ها برابر است با $(-a)$، پس داریم:

$$(-b) + (b-۱) = (-a) \Rightarrow -۱ = -a \Rightarrow a = ۱$$

از طرفی برای به‌دست آوردن دامنه تابع $g(x)$، داریم:

$$|x| - ۴ > ۰ \Rightarrow |x| > ۴ \Rightarrow \begin{cases} x > ۴ \\ x < -۴ \end{cases}$$

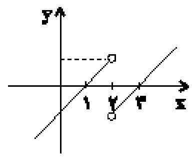
بنابراین اعداد صحیح بازه $[-۴ , ۶]$ که عضو D_g می‌باشند عبارتند از $\{۵ , ۶\}$.

سوال ۳۵ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | دشوار

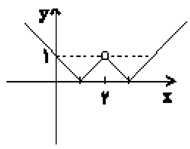
ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = (x-۲) - \frac{x-۲}{|x-۲|} = \begin{cases} x-۲-۱ = x-۳ & , \quad x > ۲ \\ x-۲+۱ = x-۱ & , \quad x < ۲ \end{cases}$$

پس نمودار تابع f به صورت زیر است:



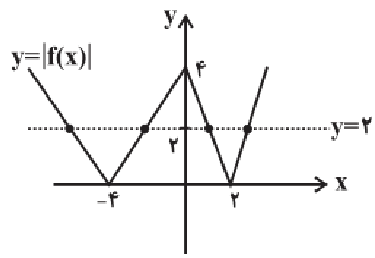
بنابراین نمودار $|f|$ به صورت زیر می‌باشد:



با توجه به نمودار $|f|$، خط $y = k$ هیچ‌گاه نمی‌تواند نمودار $|f|$ را در ۳ نقطه قطع کند.

سوال ۳۶ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

ابتدا نمودار $y=|f(x)|$ را رسم می‌کنیم:



در تابع $g(x)$ با توجه به این‌که عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، داریم: $۲-|f(x)|\geq ۰ \Rightarrow |f(x)|\leq ۲$

واضح است که باید نقاطی را پیدا کنیم که در آن‌ها $|f(x)|=۲$ باشد.

$$f(x)=\begin{cases} x+۴ & , x<۰ \\ -۲x+۴ & , x\geq ۰ \end{cases} \xrightarrow{|f(x)|=۲} \begin{cases} x+۴=۲ \Rightarrow x=-۲ \\ x+۴=-۲ \Rightarrow x=-۶ \\ -۲x+۴=۲ \Rightarrow x=۱ \\ -۲x+۴=-۲ \Rightarrow x=۳ \end{cases}$$

دامنه تابع $g(x)$، نقاطی می‌شود که در آن مقدار تابع $y=|f(x)|$ کمتر یا مساوی ۲ باشد.

$$D_g=[-۶,-۲]\bigcup[۱,۳]$$

سوال ۳۷ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۳ | دشوار

نکته:

$$[-x]=\begin{cases} -[x] & x\in Z \\ -[x]-۱ & x\notin Z \end{cases}$$

اگر $x\in Z \Rightarrow [x]-(-[x])=۳ \Rightarrow ۲[x]=۳ \Rightarrow [x]=\frac{۳}{۲}$ غ.ق.

اگر $x\notin Z \Rightarrow [x]-(-[x]-۱)=۳ \Rightarrow ۲[x]+۱=۳ \Rightarrow [x]=۱$

$$\Rightarrow ۱\leq x<۲ \xrightarrow{x\notin Z} x\in (۱,۲)$$

سوال ۳۸ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۹ | دشوار

دامنه توابع گویا از حذف ریشه‌های مخرج از مجموعه اعداد حقیقی به‌دست می‌آید. بنابراین ۲ و ۱ ریشه‌های $۳x^۲+ax+b$ هستند. یعنی:

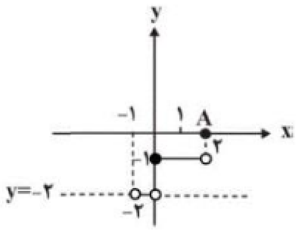
$$\begin{cases} ۳+a+b=۰ \\ ۱۲+۲a+b=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-۳ \\ ۲a+b=-۱۲ \end{cases} \Rightarrow a=-۹\ ,\ b=۶$$

بنابراین دامنه تابع $g(x)=\frac{۱}{x+a}+\frac{۱}{x+b}=\frac{۱}{x-۹}+\frac{۱}{x+۶}$ برابر $R-\{۹,-۶\}$ است.

سوال ۳۹ | گزینه درست: null | تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۷ | دشوار

می دانیم $[\frac{1}{2}x - 1] = [\frac{1}{2}x] - 1$ (عدد صحیح را می توان از داخل جزء صحیح خارج کرد) پس:

$$y = [\frac{1}{2}x] - 1$$



$$-1 < x \le 2 \to \frac{-1}{2} < \frac{1}{2}x \le 1 \to \begin{cases} -\frac{1}{2} < \frac{1}{2}x < 0 \to \begin{cases} -1 < x < 0 \\ y = -2 \end{cases} \\ 0 \le \frac{1}{2}x < 1 \to \begin{cases} 0 \le x < 2 \\ y = -1 \end{cases} \\ \frac{1}{2}x = 1 \to \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \end{cases}$$

سوال ۴۰ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

طبق فرض $x \in Z$ است، پس $x^2 \in Z$ و $[x^2] = x^2$.

$$\left[\frac{3x^2 - 1}{3}\right] - (x^2 + 2) = \left[x^2 - \frac{1}{3}\right] - (x^2 + 2) \xrightarrow{x \in Z}$$

$$x^2 + \left[-\frac{1}{3}\right] - x^2 - 2 = -1 - 2 = -3$$

سوال ۴۱ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۳ | دشوار

$$(\frac{1}{8})^{[x]} = 4^{1-[x]} \Rightarrow (2^{-3})^{[x]} = (2^2)^{1-[x]} \Rightarrow 2^{-3[x]} = 2^{2-2[x]}$$

چون پایه‌ها مساوی‌اند، باید توان‌ها مساوی باشند. بنابراین:

$$-3[x] = 2 - 2[x] \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow -2 \le x < -1$$

نتیجه‌ی آخر با توجه به تعریف جزء صحیح به دست آمده است.

سوال ۴۲ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۹ | دشوار

$$A = \sqrt{4 + \sqrt{7}} + \sqrt{4 - \sqrt{7}} \xrightarrow{\text{به توان } 2}$$

$$A^2 = 4 + \sqrt{7} + 4 - \sqrt{7} + 2\sqrt{4 + \sqrt{7}} \times \sqrt{4 - \sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow A^2 = 8 + 2\sqrt{16 - 7} = 8 + 2\sqrt{9} = 8 + 6 = 14$$

عبارت داده شده $= [\sqrt{14}] = 3$

سوال ۴۳ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۷ | دشوار

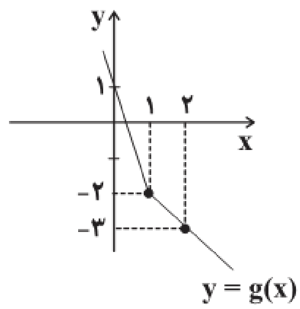
شرط وارون‌پذیری یک تابع، یک به یک بودن آن است. پس یک به یک بودن یا نبودن دو تابع را بررسی می‌کنیم.

تابع یک به یک تابعی است که به ازای ورودی‌های متمایز(x)، خروجی‌های (y) یکسان ندهد. تابع $f(x)$ یک به یک نمی‌باشد، زیرا:

$$\begin{cases} x=۱ \Rightarrow f(۱)=۰ \\ x=۰ \Rightarrow f(۰)=۰ \end{cases} \Rightarrow (۰\,,\,۰)\,,\,(۱\,,\,۰)$$

برای بررسی یک به یک بودن تابع $g(x)$ بهتر است نمودار آن را رسم کنیم. اول تابع را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و بعد نمودارش را رسم می‌کنیم.

$$g(x)=\begin{cases} (x-۱)-۲x=\underbrace{-x-۱}_{y_۱} & , \quad x \geq ۱ \\ -(x-۱)-۲x=\underbrace{-۳x+۱}_{y_۲} & , \quad x < ۱ \end{cases}$$



x	y_2
1	−2
0	1

x	y_1
1	−2
2	−3

با توجه به نمودار تابع $g(x)$ اگر هر خط موازی محورها رسم کنیم نمودار تابع را در یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع $g(x)$ یک به یک است. در نتیجه f، تابعی وارون‌ناپذیر و تابعی وارون‌پذیر است.

سوال ۴۴ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

$$(۲,۶) \in f^{-۱} \Rightarrow (۶,۲) \in f \Rightarrow f(۶)=۲$$

$$\Rightarrow ۲=\frac{۲}{۳}\times(۶)+a \Rightarrow ۲=۴+a \Rightarrow a=-۲$$

ضابطه $f^{-۱}$ را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{۲}{۳}x-۲ \Rightarrow \frac{۲}{۳}x=y+۲ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲}(y+۲)$$

$$\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}y+۳ \xrightarrow[x \text{ و } y]{\text{عوض کردن جای}} y=\frac{۳}{۲}x+۳$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۳}{۲}x+۳ \Rightarrow f^{-۱}(۰)=۳$$

سوال ۴۵ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

با توجه به این‌که نقطه $(۱,۰)$ روی تابع $f^{-۱}$ قرار دارد پس نقطه $(۰,۱)$ روی تابع f می‌باشد، بنابراین با داشتن دو نقطه $(۲,-۱)$ و $(۰,۱)$، ضابطه تابع خطی $f(x)=mx+n$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{matrix}(۲,-۱)\in f\Rightarrow \\ (۰,۱)\in f\Rightarrow\end{matrix}\begin{cases}-۱=۲m+n\\ ۱=۰+n\end{cases}\Rightarrow n=۱,\ m=-۱$$

بنابراین تابع f به‌صورت $f(x)=-x+۱$ می‌باشد. حال برای به‌دست آوردن $f(-۲)+f^{-۱}(-۲)$ فرض می‌کنیم $f^{-۱}(-۲)=a$ باشد، پس داریم:

$$f^{-۱}(-۲)=a\Rightarrow f(a)=-۲\Rightarrow -۲=-a+۱\Rightarrow a=۳\Rightarrow f^{-۱}(-۲)=۳$$

$$f(-۲)=-(-۲)+۱=۳$$

بنابراین:

$$f(-۲)+f^{-۱}(-۲)=۳+۳=۶$$

سوال ۴۶ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۹ | دشوار

در تابع وارون داریم:

$$f(a)=b\Rightarrow f^{-۱}(b)=a$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(۲۷)=b\Rightarrow f(b)=۲۷$$

با توجه به تابع f داریم:

$$\Rightarrow ۲b^۳+۱۱=۲۷\Rightarrow ۲b^۳=۱۶\Rightarrow b^۳=۸$$

$$\Rightarrow b=۲$$

سوال ۴۷ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

$$f^{-۱}(۲)=a\Rightarrow f(a)=۲$$

$$f^{-۱}(-۲)=b\Rightarrow f(b)=-۲$$

اگر $a\le ۰$ باشد: غ‌ق‌ق $\quad f(a)=۲a-۱=۲\Rightarrow ۲a=۳\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$

اگر $a>۰$ باشد: $\quad f(a)=a-۱=۲\Rightarrow a=۳$

اگر $b\le ۰$ باشد: $\quad f(b)=۲b-۱=-۲\Rightarrow ۲b=-۱\Rightarrow b=-\frac{۱}{۲}$

اگر $b>۰$ باشد: غ‌ق‌ق $\quad f(b)=b-۱=-۲\Rightarrow b=-۱$

$$\Rightarrow f^{-۱}(۲)+f^{-۱}(-۲)=۳-\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

سوال ۴۸ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | دشوار

تابع f از نقطه $(۲,۰)$ می‌گذرد و نمودار $f^{-۱}$ را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع می‌کند. از طرفی نمودارهای $f^{-۱}$ و f در نقطه‌ای روی خط $y=x$ یکدیگر را قطع می‌کنند، پس داریم:

$$\begin{cases}(۰,۲)\in f^{-۱}\\ (۳,۳)\in f^{-۱}\end{cases}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۳-۲}{۳-۰}x+۲$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۳}x+۲\Rightarrow f^{-۱}(-۳)=-۱+۲=۱$$

سوال ۴۹ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | دشوار

f^{-1} و f از نقطه $(-۲,۴)$ عبور می کنند. پس داریم:

$$\Rightarrow (-۲,۴) \in f \Rightarrow (۴,-۲) \in f^{-1}, (-۲,۴) \in f^{-1}$$

معادله خط f^{-1} را بدست می‌آوریم:

$$m = \frac{-۲-۴}{۴-(-۲)} = \frac{-۶}{۶} = -۱$$

$$y - y_۰ = m(x - x_۰)$$
$$\xrightarrow{(-۲,۴)\in f^{-1}} y - ۴ = -۱(x - (-۲))$$
$$\Rightarrow y = -x + ۲ \Rightarrow f^{-1}(x) = -x + ۲$$

طول از مبدأ $\xrightarrow{f^{-1}(x)=۰} ۰ = -x + ۲ \Rightarrow x = ۲$

نکته: اگر نمودار توابع خطی fو f^{-1} هر دو از نقطه ای خارج از خط $y = x$ عبور کنند، fو f^{-1}بر هم منطبق اند و شیبشان (-۱) است.

سوال ۵۰ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۷ | دشوار

شرط دامنه تابع رادیکالی با فرجه زوج:

$$f^{-1}(x) - f(x) \geq ۰ \Rightarrow f^{-1}(x) \geq f(x)$$

با توجه به این‌که $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ نسبت به خط $y = x$ قرینه‌اند xهایی که به ازای آن‌ها $f^{-1}(x)$ بالاتر از $y = x$ یا مساوی با آن است، جواب سوال می‌باشند. در محدوده $[۴, +\infty)$ خط $y = x$ بالاتر از $f(x)$ یا مساوی با آن می‌باشد، پس $f^{-1}(x)$ هم بالاتر از $f(x)$ یا مساوی با آن خواهد بود.

سوال ۵۱ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

طبق نمودار داریم:

$$x = -۲ \Rightarrow y = -۳ \Rightarrow -۳ = f(-۲+۲) = f(۰) \Rightarrow f^{-1}(-۳) = ۰$$

$$x = -۱ \Rightarrow y = ۰ \Rightarrow ۰ = f(-۱+۲) = f(۱) \Rightarrow f^{-1}(۰) = ۱$$

$$x = ۲ \Rightarrow y = ۲ \Rightarrow ۲ = f(۲+۲) = f(۴) \Rightarrow f^{-1}(۲) = ۴$$

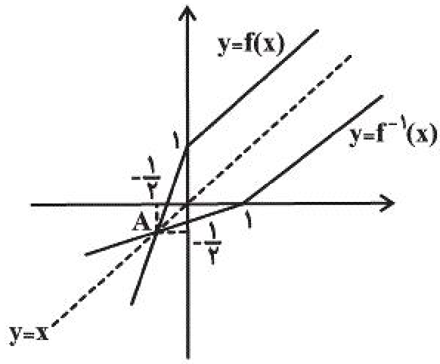
در نتیجه:

$$A = \frac{f^{-1}(۰) + f^{-1}(۲)}{۱ + f^{-1}(-۳)} = \frac{۱+۴}{۱+۰} = ۵$$

سوال ۵۲ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

تابع را دو ضابطه‌ای کرده و رسم می‌کنیم:

$$f(x)=2x-|x|+1=\begin{cases} x+1 & ; \quad x\geq 0 \\ 3x+1 & ; \quad x<0 \end{cases}$$



نمودار تابع f را نسبت به نیمساز ناحیه‌های اول و سوم $(y=x)$ قرینه می‌کنیم. با توجه به شکل مشخص است که محل برخورد دو نمودار روی خط $y=x$ است و نقطه‌ای است که x آن منفی است، بنابراین:

$$x<0: 3x+1=x \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \Rightarrow a+b=-\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})=-1$$

سوال ۵۳ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{2} \Rightarrow y=\frac{1-\sqrt{x}}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}=1-2y$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x=(1-2y)^2$$

$$\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض می کنیم}} y=(1-2x)^2 \Rightarrow f^{-1}(x)=(1-2x)^2$$

دقت کنید که قبل از به توان دو رساندن $\sqrt{x}=1-2y$، باید بگوییم که چون $\sqrt{x}\geq 0$ است، پس باید $1-2y\geq 0$ باشد، یعنی $y\leq\frac{1}{2}$ است و چون در تابع وارون جای x و y عوض می‌شود، پس شرط $y\leq\frac{1}{2}$ برای تابع $f(x)$ تبدیل به شرط $x\leq\frac{1}{2}$ برای تابع $f^{-1}(x)$ می‌گردد، پس وارون $f(x)$ به‌صورت زیر است:

$$f^{-1}(x)=(1-2x)^2, \quad x\leq\frac{1}{2}$$

سوال ۵۴ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۷ | دشوار

$$f^{-1}(2)=0 \rightarrow f(0)=2 \rightarrow b=2 \quad (1)$$

$$\xrightarrow{(1)} g=\{(2,4),(2,a),(-2a,a^2),(8,16)\}$$

با توجه به دو زوج مرتب $(2,a)$و $(2,4)$ برای تابع بودن g باید داشته باشیم:

$$a=4 \quad (2)$$

که در این صورت:

$$g=\{(2,4),(2,4),(-8,16),(8,16)\}$$

که تابع g یک به یک نیست. پس مقداری برای a به دست نمی‌آید.

سوال ۵۵ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | دشوار

ضابطه f را به صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم.

وارون تابع f را حساب می‌کنیم:

$$y=ax+b \Rightarrow x=\frac{y-b}{a} \xrightarrow[y,x]{\text{عوض کردن}} y=\frac{x-b}{a}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$$

پس:

$$f(x)=f^{-1}(x)+4 \Rightarrow ax+b=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}+4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{a} \rightarrow a=\pm 1 \\ b=\frac{-b}{a}+4 \end{cases}$$

اگر $a=-1$ باشد، معادله دوم جواب ندارد پس باید a برابر با ۱ باشد:

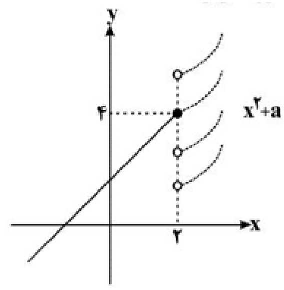
$$b=\frac{-b}{a}+4 \xrightarrow{a=1} b=-b+4 \rightarrow b=2$$

ضابطه f به شکل $f(x)=x+2$ درآمد و داریم:

$$f(4)=4+2=6$$

سوال ۵۶ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

نمودار تابع f به ازای مقادیر مختلف a به‌صورت زیر است:

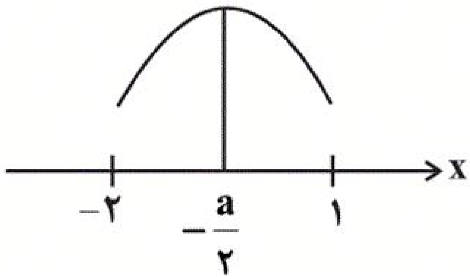


با توجه به نمودار برای این‌که تابع یک به یک نباشد، باید:

$$2^2+a<4 \Rightarrow a<0$$

سوال ۵۷ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | دشوار

مطابق شکل اگر طول رأس سهمی $(x = -\frac{a}{۲})$ در داخل بازه $(-۲,۱)$ قرار گیرد، تابع در این بازه یک‌به‌یک نمی‌شود. بنابراین $-\frac{a}{۲}$ به جز بازه $(-۲,۱)$ هر مقدار حقیقی دیگری می‌تواند اختیار کند.



$$-۲ < -\frac{a}{۲} < ۱ \Rightarrow -۴ < -a < ۲ \Rightarrow -۲ < a < ۴$$

بنابراین:

$$\Rightarrow a \in R - (-۲,۴)$$

سوال ۵۸ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

ضابطه تابع وارون را پیدا می‌کنیم:

$$y = \frac{۲x+۲}{ax+b} \Rightarrow axy + by = ۲x + ۲$$

$$\Rightarrow axy - ۲x = ۲ - by$$

$$x(ay-۲) = ۲ - by \Rightarrow x = \frac{۲-by}{ay-۲} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۲-bx}{ax-۲}$$

$$f^{-۱}(x) = f(x) \Rightarrow b = -۲$$

سوال ۵۹ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | دشوار

اگر $-۱ \le x \le ۱$ باشد، حاصل عبارت داخل قدرمطلق منفی است.

$$\Rightarrow f(x) = |۲x-۳| + ۱ = -۲x + ۳ + ۱ = -۲x + ۴$$

وارون تابع $y = -۲x + ۴$ را حساب می‌کنیم:

$$y = -۲x + ۴ \xrightarrow{x \text{ برحسب } y} x = \frac{۴-y}{۲}$$

$$\xrightarrow[\text{جای } x \text{ و } y]{\text{عوض کردن}} y = \frac{۴-x}{۲} \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}x + ۲$$

حال برد f که همان دامنه $f^{-۱}$ است را بدست می‌آوریم:

$$-۱ \le x \le ۱ \Rightarrow -۲ \le -۲x \le ۲ \Rightarrow ۲ \le -۲x + ۴ \le ۶$$

$$\Rightarrow D_{f^{-۱}} = [۲,۶]$$

سوال ۶۰ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۷ | دشوار

ابتدا محدوده‌ای را برای a محاسبه می‌کنیم که تابع در بازه داده شده یک به یک نباشد. سپس مجموعه جواب حاصل را از R کم می‌کنیم.
می‌دانیم اگر ریشه عبارت داخل قدرمطلق در بازه $(-۲,۱)$ قرار داشته باشد. تابع در آن بازه یک به یک نخواهد بود. پس:

ریشه عبارت داخل قدرمطلق : $\frac{x}{۲}+a=۰ \Rightarrow x=-۲a$

$\Rightarrow -۲<-۲a<۱ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}<a<۱$

بنابراین:

محدوده a $=R-(-\frac{۱}{۲},۱)$

سوال ۶۱ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۷ | دشوار

برای آن که f در بازه $[-۱\,,\,۳]$ یک به یک باشد، باید $-\frac{a}{۲}$ داخل این بازه قرار نگیرد، پس:

$$\left.\begin{array}{ll}(۱) & -\frac{a}{۲}\geq ۳ \Rightarrow a\leq -۶\\ (۲) & -\frac{a}{۲}\leq -۱ \Rightarrow a\geq ۲\end{array}\right\}$$

پس $a\leq -۶$ یا $a\geq ۲$ است.

سوال ۶۲ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۷ | دشوار

ابتدا تابع f را می‌یابیم:

$$f=\{(۳,۲),(-۱,۱),(۲,۰),(۰,-۱)\}$$

دامنه تابع $\frac{۲f^{-۱}}{f}$ برابر است با:

$$D_{\frac{۲f^{-۱}}{f}}=D_{f^{-۱}}\bigcap D_f-\{x|f(x)=۰\}$$
$$=\{۲,۱,۰,-۱\}\bigcap\{۳,-۱,۲,۰\}-\{۲\}=\{-۱,۰\}$$

بنابراین :

$$x=۰:\left(\frac{۲f^{-۱}}{f}\right)(۰)=\frac{۲f^{-۱}(۰)}{f(۰)}=\frac{۲(۲)}{-۱}=-۴\Rightarrow(۰,-۴)\in\frac{۲f^{-۱}}{f}$$
$$x=-۱:\frac{۲f^{-۱}(-۱)}{f(-۱)}=\frac{۲(۰)}{۱}=۰\Rightarrow(-۱,۰)\in\frac{۲f^{-۱}}{f}$$

سوال ۶۳ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | دشوار

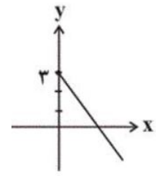
$g^{-۱}(۲)=۴\Rightarrow g(۴)=۲$

با قراردادن $x=۲$ در رابطه داده شده داریم:

$$f(۵)=۲g(۴)-۱\Rightarrow f(۵)=۲(۲)-۱$$
$$\Rightarrow f(۵)=۳\Rightarrow f^{-۱}(۳)=۵$$

سوال ۶۴ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | دشوار

تابع f را برای $x \geq ۰$رسم می کنیم:



و چون می‌دانیم نمودار $x^۲ - ۲x + k$ رو به بالا است در نتیجه باید کم‌ترین مقدار آن بیش‌تر از ۳ باشد.

$$y = x^۲ - ۲x + k = x^۲ - ۲x + ۱ + k - ۱$$

$$= (x-۱)^۲ + (k-۱) \Rightarrow y = (x-۱)^۲ + (k-۱)$$

کم‌ترین مقدار این ضابطه به ازای $x < ۰$ در نقطه مرزی اتفاق می افتد. بنابراین:

$$y = k \geq ۳$$

سوال ۶۵ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۷ | دشوار

وارون هر تابع خطی، یک تابع خطی است. وارون f را حساب می‌کنیم:

$$y = ax + ۲ \Rightarrow x = \frac{y-۲}{a} \xrightarrow{\text{عوض کردن } x \text{ و } y} y = \frac{x-۲}{a}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۱}{a}x - \frac{۲}{a}$$

اگر f و $f^{-۱}$ در بیش از یک نقطه برخورد داشته باشند، چون هر دو توابعی خطی هستند، باید بر هم منطبق باشند؛ بنابراین داریم:

$$f(x) = f^{-۱}(x) \Rightarrow ax + ۲ = \frac{۱}{a}x - \frac{۲}{a} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{۱}{a} \\ ۲ = -\frac{۲}{a} \end{cases} \Rightarrow a = -۱$$

پس ضابطه f و $f^{-۱}$ به صورت $f(x) = f^{-۱}(x) = -x + ۲$ درمی‌آید.

$$\Rightarrow f^{-۱}(۳) = -۳ + ۲ = -۱$$

سوال ۶۶ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

$$f(x) = y = x + \sqrt{x} = (\sqrt{x} + \frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{۴y+۱}{۴} = (\sqrt{x} + \frac{۱}{۲})^۲$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۴y+۱}}{۲} \Rightarrow x = (\frac{\sqrt{۴y+۱} - ۱}{۲})^۲$$

$$\xrightarrow[\text{عوض می کنیم.}]{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را}} y = (\frac{\sqrt{۴x+۱} - ۱}{۲})^۲ = f^{-۱}(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۴ \\ b = ۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = ۲$$

سوال ۶۷ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۹ | دشوار

فرض کنیم $f(\frac{۲}{۷}) = a$ در نتیجه $f^{-۱}(a) = \frac{۲}{۷}$ پس: لذا:

$$۳a - ۵ = \frac{۲}{۷} \Rightarrow ۳a = \frac{۲}{۷} + ۵ \Rightarrow ۳a = \frac{۳۷}{۷} \Rightarrow a = \frac{۳۷}{۲۱}$$

سوال ۶۸ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۷ | دشوار

ابتدا محدوده‌ای را برای a محاسبه می‌کنیم که تابع در بازه داده شده یک به یک نباشد. سپس مجموعه جواب حاصل را از R کم می‌کنیم.
می‌دانیم اگر ریشه عبارت داخل قدرمطلق در بازه $(-۲,۱)$ قرار داشته باشد. تابع در آن بازه یک به یک نخواهد بود. پس:

ریشه عبارت داخل قدرمطلق : $\frac{x}{۲}+a=۰ \Rightarrow x=-۲a$

$$\Rightarrow -۲<-۲a<۱ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}<a<۱$$

بنابراین:

محدوده a $=R-(-\frac{۱}{۲},۱)$

سوال ۶۹ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۷ | دشوار

ابتدا دامنه تابع f.g را می‌یابیم:

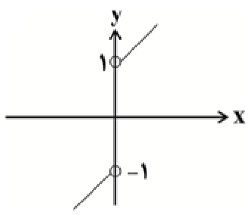
$$D_{f.g}=D_f\bigcap D_g=R\bigcap(R-\{۰\})=R-\{۰\}$$

حال ضابطه f.g را محاسبه می‌کنیم:

$$y=(f.g)(x)=f(x).g(x)=(x^۲+|x|)\left(\frac{۱}{x}\right)=\frac{x^۲+|x|}{x}$$

$$\Rightarrow y=x+\frac{|x|}{x}=\begin{cases} x+۱ & , \quad x>۰ \\ x-۱ & , \quad x<۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{برد}=(-\infty,-۱)\bigcup(۱,+\infty)=R-[-۱,۱]$$



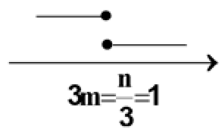
پس برد تابع، سه عدد صحیح $\{-۱,۰,۱\}$ را شامل نمی‌شود.

سوال ۷۰ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

$$D_f: n-۳x\geq ۰ \Rightarrow n\geq ۳x \Rightarrow x\leq \frac{n}{۳}$$

$$D_g: x-۳m\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۳m$$

طبق زوج مرتب داده شده، متوجه می‌شویم که $D_{f+g}=D_f\bigcap D_g=\{۱\}$ اشتراک دامنه‌ها باید $x=۱$ باشد، در نتیجه:



$$۳m=۱\Rightarrow m=\frac{۱}{۳}$$

$$\frac{n}{۳}=۱\Rightarrow n=۳$$

حال با جایگذاری مقادیر فوق در توابع داریم:

$$f(x)+g(x)=\sqrt{۳-۳x}+\sqrt{x-۳(\frac{۱}{۳})}=\sqrt{۳-۳x}+\sqrt{x-۱}$$

$$\xrightarrow{X=۱} f(۱)+g(۱)=\sqrt{۳-۳}+\sqrt{۱-۱}$$
$$=۰+۰=۰ \xrightarrow[\text{طبق فرض}]{(f+g)(۱)=a} a=۰$$

بنابراین:

$$am+n=۰\times\frac{۱}{۳}+۳=۳$$

سوال ۷۱ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | دشوار

می‌دانیم که: $D_{\frac{f}{g}}=D_f\bigcap D_g-\{x|g(x)=۰\}$، بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} D_f: x+a\geq ۰\Rightarrow x\geq -a \\ D_g: b-x\geq ۰\Rightarrow x\leq b\end{array}\right\}\Rightarrow D_f\bigcap D_g=[-۱,۴]=[-a,b]$$
$$\Rightarrow\begin{cases} a=۱ \\ b=۴\end{cases}$$

از طرفی $x=۰$ در دامنه تابع $\frac{f}{g}$ قرار ندارد، پس مخرج کسر یعنی $g(x)$ به‌ازای $x=۰$ برابر صفر می‌شود.

$$g(۰)=۰\Rightarrow\sqrt{b-۰}+d=۰\Rightarrow\sqrt{۴}+d=۰$$
$$\Rightarrow ۲+d=۰\Rightarrow d=-۲$$

حال داریم:

$$f(x)=\sqrt{x+۱}-c\ ,\ \ g(x)=\sqrt{۴-x}-۲$$

$$f(۳)+g(۳)=۵\Rightarrow(۲-c)+(-۱)=۵$$
$$\Rightarrow ۱-c=۵\Rightarrow c=-۴$$
$$\Rightarrow a+b+c+d=۱+۴-۴-۲=-۱$$

سوال ۷۲ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۹ | دشوار

$f(x)=\sqrt{x-۳} \Rightarrow D_f : x \geq ۳$
$g=\{(۲,-۱)(۴,۴)(-۱,۵)(۷,۳)\}$
$\Rightarrow D_g=\{-۱,۲,۴,۷\}$

اکنون دامنه و زوج مرتب‌های $۲f+۳g$ را به‌دست می‌آوریم:

$$D_{۲f+۳g}=D_f \bigcap D_g \Rightarrow D_{۲f+۳g}=\{۴,۷\}$$

$$۲f+۳g=\{(۴,\overset{۲\times۱}{\cancel{۲}f(۴)}+\overset{۳\times۴}{\cancel{۳}g(۴)}),(۷,\overset{۲\times۲}{\cancel{۲}f(۷)}+\overset{۳\times۳}{\cancel{۳}g(۷)})\}$$

$$۲f+۳g=\{(۴,\underset{\downarrow}{۱۴}),(۷,\underset{\downarrow}{۱۳})\}$$

max min

سوال ۷۳ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

در دامنه‌های مشترک دو تابع f و g، می‌بایست تابع $f\times g$ را محاسبه کرد.

$$D_{f\times g}=D_f\cap D_g=(-\infty,-۵)\cup(۱,۲)$$

$$(f\times g)(x)=\begin{cases}(x)(۲x^۲) & , \quad ۱<x<۲\\ (x)(\frac{۱}{x}) & , \quad x<-۵\end{cases}$$

$$\Rightarrow f\times g=\begin{cases}۲x^۳ & , \quad ۱<x<۲\\ ۱ & , \quad x<-۵\end{cases}$$

سوال ۷۴ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

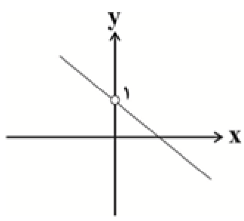
دامنه توابع f و g برابر $R-\{۰\}$ است. پس دامنه f-g که از اشتراک دامنه توابع f و g حاصل می‌شود نیز $R-\{۰\}$ است.
حال ضابطه f-g را می‌یابیم:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{x+۱}{x}-\frac{x^۲+۱}{x}=\frac{x+۱-x^۲-۱}{x}$$

$$\Rightarrow (f-g)(x)=\frac{x-x^۲}{x}=\frac{x(۱-x)}{x}=۱-x$$

$$\Rightarrow (f-g)(x)=۱-x, \ (x\neq۰)$$

نمودار تابع را رسم و برد تابع را تعیین می‌کنیم:



$\Rightarrow$ برد $=R-\{۱\}$

سوال ۷۵ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | دشوار

$$\frac{f}{g} = \frac{۳}{[x](x-۱)}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \bigcap D_g) - \{x|g(x)=۰\} = (R-\{۱\}) - [۰\,,\,۱) = R - [۰\,,\,۱]$$

پس تابع $\frac{f}{g}$ در دو نقطه با طول صحیح یعنی $\{۰\,,\,۱\}$ تعریف نمی‌شود.

سوال ۷۶ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

معادله خط گذرنده از دو نقطه $(-۱,۲)$ و $(۱,۴)$ را می‌نویسیم.

$$m = \frac{۴-۲}{۱+۱} = ۱\ ,\ \ y-۲ = ۱(x+۱) \Rightarrow y = x+۳ \Rightarrow f(x) = x+۳$$

ضابطه $f^{-۱}$ را به دست می‌آوریم.

$$y = x+۳ \Rightarrow x = y-۳ \Rightarrow f^{-۱}(x) = x-۳$$

دامنه $f^{-۱}$ همان برد f است.

$$D_{f^{-۱}} = R_f = [f(-۱), f(۳)] = [۲,۶]$$

$$D_g = D_{f+f^{-۱}} = D_f \bigcap D_{f^{-۱}} = [-۱,۳] \bigcap [۲,۶] = [۲,۳]$$

$$g(x) = (x+۳) + (x-۳) = ۲x$$

سوال ۷۷ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۷ | دشوار

عبارت زیر رادیکال$> ۰ \Rightarrow x - x^۲ > ۰ \Rightarrow x^۲ - x < ۰$

$\Rightarrow x(x-۱) < ۰ \Rightarrow ۰ < x < ۱$

از آنجا که در این فاصله مقدار [x] برابر صفر است، در نتیجه: $f(x) = ۰$ پس برد تابع برابر $\{۰\}$ است که شامل یک عدد صحیح است.

سوال ۷۸ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | دشوار

اگر فرض کنیم $g(x)=x[x]$ باشد، داریم:

$$fog(x)=x+[x]$$

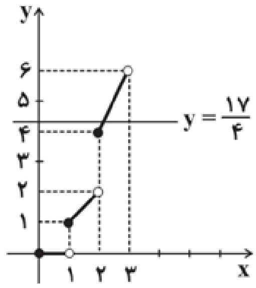
حال برای یافتن مقدار $f(\frac{۱۷}{۴})$ کافی است جواب معادله $g(x)=\frac{۱۷}{۴}$ را پیدا کنیم و آن را در ضابطه $fog(x)$ جای‌گذاری کنیم.

$$۰\leq x<۱\Rightarrow g(x)=۰$$

$$۱\leq x<۲\Rightarrow g(x)=x$$

$$۲\leq x<۳\Rightarrow g(x)=۲x$$

نمودار تابع $y=g(x)$ در شکل زیر رسم شده است. برای یافتن جواب معادله $g(x)=\frac{۱۷}{۴}$، کافی است خط $y=۲x$ را با خط $y=\frac{۱۷}{۴}$ (مطابق شکل) تقاطع دهیم، بنابراین داریم:



$$۲x=\frac{۱۷}{۴}\Rightarrow x=\frac{۱۷}{۸}$$

$$\Rightarrow f(\frac{۱۷}{۴})=fog(\frac{۱۷}{۸})=\frac{۱۷}{۸}+[\frac{۱۷}{۸}]=\frac{۱۷}{۸}+۲=\frac{۳۳}{۸}$$

سوال ۷۹ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | دشوار

$$D_f:\begin{cases}x+۴\geq ۰\\ ۱-۲x\geq ۰\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}-۴\leq x\leq\frac{۱}{۲}$$

$$D_g:\begin{cases}x+۴\geq ۰\\ ۱-۲x\geq ۰\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}-۴\leq x\leq\frac{۱}{۲}$$

دامنه $f.g$ را حساب می‌کنیم:

$$D_{fg}=D_f\bigcap D_g=[-۴,\frac{۱}{۲}]\bigcap[-۴,\frac{۱}{۲}]=[-۴,\frac{۱}{۲}]$$

ضابطه $f.g$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(fg)(x)=f(x)g(x)=(x+۴)-(۱-۲x)=۳x+۳$$

حال از روی دامنه، برد $f.g$ را حساب می‌کنیم:

$$-۴\leq x\leq\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\times ۳}-۱۲\leq ۳x\leq\frac{۳}{۲}\xrightarrow{+۳}$$
$$-۹\leq ۳x+۳\leq ۴/۵$$

پس برد $f.g$ ، بازه $[-۹,۴/۵]$ است که شامل ۱۴ عدد صحیح است.

سوال ۸۰ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | دشوار

اگر نمودار تابع f نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم متقارن باشد، نمودارهای f و $f^{-۱}$ بر هم منطبق هستند. یعنی: $(fof)(x)=x$

$$\frac{(a-۱)\times\frac{(a-۱)x}{x-۱}}{\frac{(a-۱)x}{x-۱}-۱}=x\Rightarrow\frac{(a-۱)^{۲}x}{(a-۱)x-x+۱}=x$$

$$\Rightarrow(a-۱)^{۲}x=(a-۱)x^{۲}-x^{۲}+x\Rightarrow(a-۱)^{۲}x-x=(a-۲)x^{۲}$$

$$\Rightarrow((a-۱)^{۲}-۱)x-(a-۲)x^{۲}=۰\Rightarrow\begin{cases}a-۲=۰\Rightarrow a=۲\\(a-۱)^{۲}-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\a=۰\end{cases}\end{cases}$$

که فقط $a=۲$ قابل قبول است.

سوال ۸۱ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۹ | دشوار

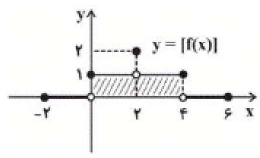
$$x=g(\frac{۱}{۳})=\frac{۱}{\frac{۱}{۳}}=۳\Rightarrow x=۳\Rightarrow\begin{cases}f(۳)=\sqrt{۳+۱}=۲\\g(۳)=-۹+۵=-۴\end{cases}$$

$$[(۲f+\frac{g}{۳})(۳)]=[۲f(۳)+\frac{g(۳)}{۳}]=[۲\times۲+\frac{۱}{۳}\times(-۴)]$$

$$=[۴-\frac{۴}{۳}]=[\frac{۸}{۳}]=۲$$

سوال ۸۲ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | دشوار

با توجه به تعریف جزء صحیح و مقادیر تابع $y=f(x)$ در محدوده $[-۲\,,\,۶]$، نمودار تابع $y=[f(x)]$ را رسم می‌کنیم. مساحت سطح محدود به نمودار تابع $y=[f(x)]$ و محورهایx برابر با مساحت مستطیل هاشورخورده یعنی $۴\times۱=۴$ می‌باشد.



سوال ۸۳ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۷ | دشوار

f باید یک به یک باشد، پس مولفه‌های اول دو زوج مرتب $(\frac{۴}{k},۲)$ و (k+۳,۲) با هم برابرند:

$$k+۳=\frac{۴}{k}\Rightarrow k^{۲}+۳k-۴=۰\Rightarrow\begin{cases}k=۱\\k=-۴\end{cases}$$

اگر k=۱ باشد، f یک به یک نمی‌شود:

$$f=\{(۴,۲),(۱,۴),(۳,۴)\}$$

اگر k=-۴ باشد، f یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر است:

$$f=\{(-۱,۲),(۱,۴),(۳,-۱)\}$$

پس k=-۴ است. حالا مقدار $(f-g)(-k-۱)$ را حساب می‌کنیم:

$$(f-g)(۳)=f(۳)-g(۳)=-۱-\left[\frac{۳}{۲}-۲\right]=-۱-(-۱)=۰$$

سوال ۸۴ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۵ | دشوار

می‌دانیم به‌ازای $fof(x)^{-1}=x\,(x\in D_f)$، چون دامنه‌ی f برابر $(-\infty,1]$ پس به‌ازای $x\in(-\infty,1]$ داریم $fof(x)^{-1}=x$.

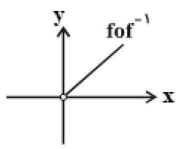
داریم $y=\sqrt{1+fof^{-1}(x)}=\sqrt{1+x}$، برای محاسبه‌ی دامنه‌ی تابع فوق، زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$1+x\ge 0\Rightarrow x\ge -1\xrightarrow{x\in(-\infty,1]}-1\le x\le 1$$

سوال ۸۵ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۵ | دشوار

ابتدا ضابطه‌ی f را ساده می‌کنیم: $f(x)=e^{x\ln 2}=e^{\ln 2^x}=2^x$

از طرفی می‌دانیم معکوس تابع $f(x)=2^x$ به‌صورت $f^{-1}(x)=\log_2^x$ است که دامنه‌ی آن $D_{f^{-1}}=(0,+\infty)$ است.



از طرفی می‌دانیم $fof^{-1}(x)=x$ که $x\in D_{f^{-1}}$ است و چون $D_{f^{-1}}=(0,+\infty)$ است، پس نمودار آن به‌صورت زیر است:

در نهایت با حل معادله‌ی $fof^{-1}(x)=x^2$ تعداد جواب‌ها را می‌یابیم:

$$fof^{-1}(x)=x^2\Rightarrow x=x^2\Rightarrow x^2-x=0$$

$$\Rightarrow x(x-1)=0\Rightarrow x=0,\ x=1$$

اما چون $x=0$ در دامنه‌ی تابع $fof^{-1}(x)$ قرار ندارد، پس تنها جواب معادله $x=1$ است.

سوال ۸۶ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۹ | دشوار

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2-3x+7x+2$$

$$=x^2+4x+2=(x+2)^2-2$$

با قرار دادن $x=\sqrt{5}-2$ داریم:

$$(f+g)(\sqrt{5}-2)=(\sqrt{5}-2+2)^2-2=\sqrt{5}^2-2$$

$$=5-2=3$$

سوال ۸۷ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۶ | دشوار

ابتدا دامنه هریک از توابع را مشخص می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x+3}\Rightarrow x+3\ge 0\Rightarrow x\ge -3\Rightarrow D_f=[-3,+\infty)$$

$$g(x)=\sqrt{a-x}+2b\Rightarrow a-x\ge 0\Rightarrow x\le a$$
$$\Rightarrow D_g=(-\infty,a]$$

بنابراین: $D_{f-g}=D_f\bigcap D_g\Rightarrow D_{f-g}=[-3,a]$

لذا با توجه به فرض مسأله نتیجه می‌شود که: $a=10$

از طرفی داریم:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x+3}+\sqrt{10-x}+2b$$
$$\Rightarrow (f+g)(6)=\sqrt{6+3}+\sqrt{10-6}+2b=6\Rightarrow 3+2+2b=6$$

بنابراین: $\Rightarrow 2b=1\Rightarrow b=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow a+b=10+\frac{1}{2}=\frac{21}{2}$$

سوال ۸۸ | گزینه درست: null | تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۹ | دشوار

$$y=۲\sqrt{۴x-۱}+۱ \xrightarrow[x\to x-۲]{\text{دو واحد به سمت راست}} y=۲\sqrt{۴(x-۲)-۱}+۱ \to y=۲\sqrt{۴x-۹}+۱$$

$$\xrightarrow[x\to \frac{۱}{۲}x]{\text{انبساط افقی به اندازهٔ ۲ واحد}} y=۲\sqrt{۴(\frac{x}{۲})-۹}+۱ \to y=۲\sqrt{۲x-۹}+۱$$

$$\xrightarrow[y\to y-۲]{\text{۲ واحد به سمت پایین}} y=۲\sqrt{۲x-۹}+۱-۲ \to \boxed{y=۲\sqrt{۲x-۹}-۱}$$

سوال ۸۹ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۸ | دشوار

$$\begin{cases} \frac{۲f+g}{f\,.\,g}(۲)=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۲n+a}{na}=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow & ۲n+a=-\frac{۱}{۲}na \\ \frac{f-g}{۲f\,.\,g}(۲)=\frac{۵}{۸} \Rightarrow \frac{n-a}{۲na}=\frac{۵}{۸} \Rightarrow & \underline{n-a=\frac{۵}{۴}na} \end{cases}$$

$$۳n=\frac{۳}{۴}na \Rightarrow a=۴ \xrightarrow{\text{جای گذاری}}$$

$$n=-۱ \Rightarrow \frac{f}{g}(۲)=\frac{n}{a}=-\frac{۱}{۴}$$

سوال ۹۰ | گزینه درست: null | تشریحی ۱۳۹۹ | دشوار

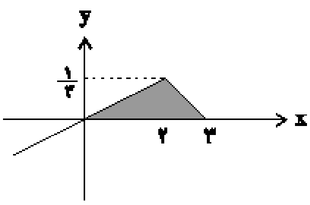
ابتدا ضابطه تابع $y=f+g$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{۲} & , \quad x\le ۲ \\ ۱ & , \quad x>۲ \end{cases} \quad , \; g(x)=\frac{-x}{۳} \; , \; (x\le ۳)$$

$$\Rightarrow (f+g)(x)=\begin{cases} \frac{x}{۲}-\frac{x}{۳} & , \quad x\le ۲ \\ ۱-\frac{x}{۳} & , \quad ۲<x\le ۳ \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{x}{۶} & , \quad x\le ۲ \\ ۱-\frac{x}{۳} & , \quad ۲<x\le ۳ \end{cases}$$

حال نمودار $f+g$ را رسم می‌کنیم:



مساحت محصور: $\frac{\frac{۱}{۳}\times ۳}{۲}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$