



مدت زمان آزمون: --

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: -

تاریخ برگزاری:

مرکز مشاوره قلم چی

①

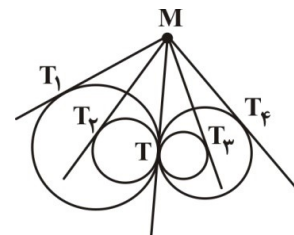
تشریحی قلم چی ۱۳۹۶

ساده

در شکل زیر، تمام دایره ها در نقاط T بر هم مماسند و از نقطه M روی مماس مشترک آن ها بر دایره ها مماس رسم کرده ایم. ثابت کنید.

بارم: ۰.۷۵

$$MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4$$



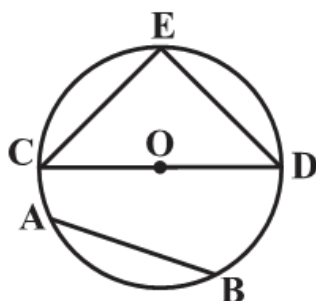
②

تشریحی ۱۳۹۶

متوسط

در دایره ای به مرکز O ، دو وتر مساوی CE و DE را مطابق شکل رسم نموده ایم. اگر کمان $\widehat{AB}$ ، $\frac{1}{4}$ محیط دایره باشد، آن گاه نسبت مساحت مثلث AOB به مساحت مثلث CED برابر است با:

بارم: ۱



$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (3)$$

③

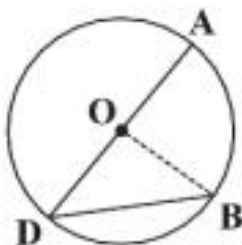
تشریحی ۱۳۹۷

ساده

مطابق شکل در دایره ای به قطر AD برای اثبات رابطه ی $\widehat{ADB} = \frac{1}{4}\widehat{AB}$ دانش آموزی نوشته است:

بارم: ۱

$$\widehat{AOB} = \widehat{ODB} + x = 2y \quad \text{در این صورت } x \text{ و } y \text{ کدام اند؟ (O مرکز دایره است.)}$$

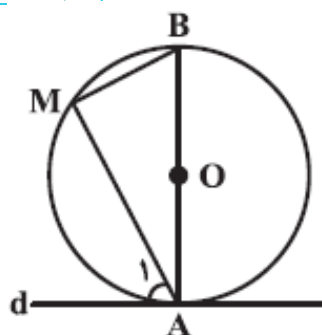


۴

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

بارم: ۱



مطابق شکل زیر، خط d در نقطه A بر دایره $C(O, 4)$ مماس است. اگر $\hat{A}_1 = 3\alpha + 15^\circ$ و $\hat{ABM} = 5\alpha - 25^\circ$ باشد، آن گاه فاصله نقطه M از قطر AB کدام است؟

- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

۵

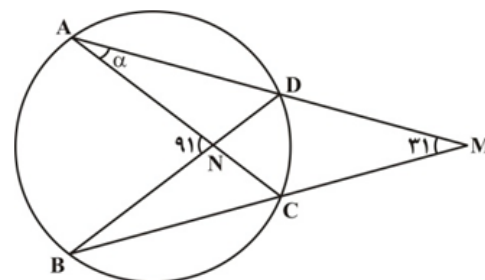
متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۸

بارم: ۲

الف) در شکل روبه رو زاویه α را بیابید.

ب) دو وتر AB و CD از یک دایره با هم برابرند، ثابت کنید اندازه کمان های AB و CD نیز با هم برابر است.



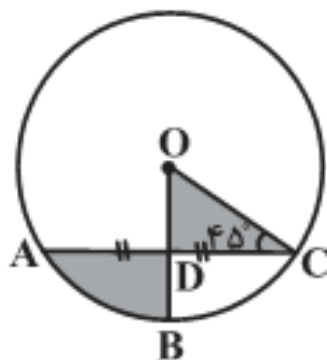
۶

دشواری

تشریحی ۱۳۹۶

بارم: ۱

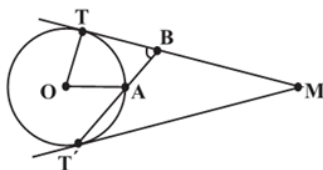
در شکل مقابل، O مرکز دایره است و $AD = DC = 4 \text{ cm}$. مجموع مساحت های دو ناحیه رنگی چند سانتی متر مربع است؟



۷

تشریحی ۱۳۹۶ متوسط

دایره $C(O, r)$ و نقطه M خارج از آن مفروض‌اند. مطابق شکل زیر، دو مماس MT و MT' را رسم کرده و از T به وسط کمان TT' (نقطه A) وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا پاره‌خط MT را در نقطه B قطع کند. اگر $\widehat{M} = 20^\circ$ و $\widehat{BTT'} = 60^\circ$ باشد، مساحت قطاع 1 AOT کدام است؟



۸

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۹ متوسط

نشان دهید اندازه هر زاویه ظلی منفرجه، برابر با نصف اندازه کمان مقابل آن است.

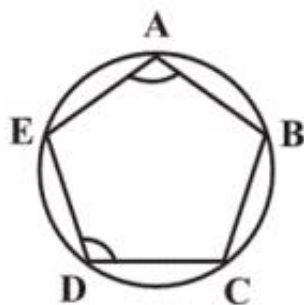
بارم: ۲.۵

۹

تشریحی ۱۳۹۹ متوسط

در شکل زیر، اگر $\widehat{BC} = 70^\circ$ باشد، حاصل $\hat{A} + \hat{D}$ کدام است؟

بارم: ۱

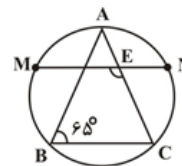


۱۰

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۷ متوسط

در شکل مقابل، A وسط $\widehat{MN}$ است. اگر E محل برخورد AC با MN باشد، اندازه $\widehat{MEC}$ را به دست آورید.

بارم: ۲



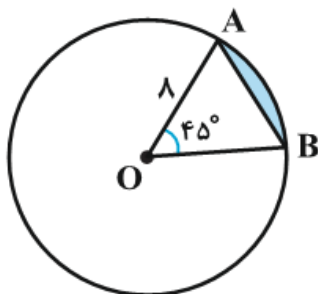
۱۱

در شکل زیر، مساحت ناحیه رنگی کدام است؟

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱



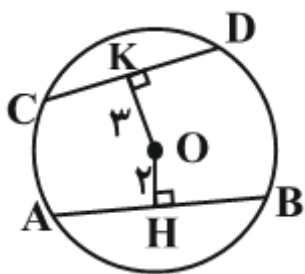
۱۲

در شکل مقابل، $OH = 2$ و $OK = 3$ است. اگر $AB = 10$ باشد، اندازه وتر CD کدام است؟

متوسط

تشریحی ۱۳۹۶

بارم: ۱



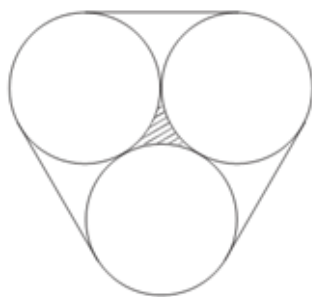
۱۳

سه دایره به شعاع‌های برابر، دوه‌دو بر هم مماس‌اند. مطابق شکل زیر، این سه دایره به وسیله نخ بسته شده‌اند. اگر مساحت قسمت‌های شورخورده برابر $(4\sqrt{3} - 2\pi)$ باشد، طول نخ کدام است؟

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

بارم: ۱



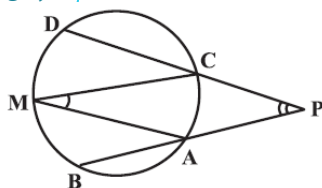
۱۴

در شکل زیر امتداد وترهای AB و CD یکدیگر را در نقطه P قطع کرده‌اند. اگر M وسط کمان $\widehat{BD}$ و $\hat{P} + \hat{M} = 50^\circ$ باشد، در این صورت زاویه BAM چند درجه است؟

ساده

تشریحی ۱۳۹۸

بارم: ۱



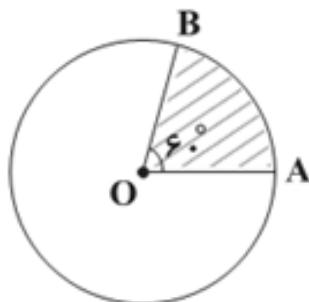
(۲۰)

ساده

تشریحی ۱۳۹۷

در شکل زیر، اگر O مرکز دایره و مساحت ناحیه هاشورخورده برابر ۱۸ باشد، طول کمان AB کدام است؟ ($\pi = 3$)

بارم: ۱



(۲۱)

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۶

طول خط المکزین دو دایره که مماس درونی هستند برابر ۳ سانتی متر است و مساحت محدود بین آن ها 21π سانتی متر مربع است. طول شعاع های دو دایره را به دست آورید.

بارم: ۱.۲۵

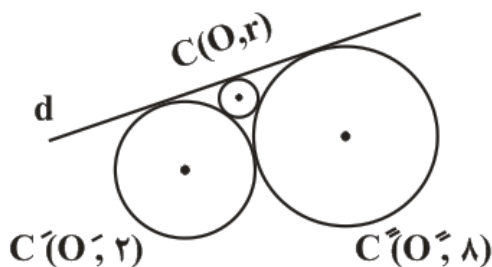
(۲۲)

دشوار

تشریحی ۱۳۹۶

در شکل زیر، سه دایره دو به دو مماس برون اند و خط d بر هر سه دایره مماس است. اندازه r کدام است؟

بارم: ۱



(۲۳)

دشوار

تشریحی ۱۳۹۷

دایره های $C(O, 8)$ و $C'(O', 3)$ ، با طول خط المکزین ۱۳ مفروض اند. اگر A و B نقاط برخورد یکی از مماس مشترک های داخلی دو دایره با مماس مشترک های خارجی آن ها باشند، طول AB برابر است با:

بارم: ۱

(۲۴)

دشوار

تشریحی ۱۳۹۷

دو دایره $C_1(O_1, r_1)$ و $C_2(O_2, r_2)$ متخارج اند. اگر اختلاف طول مماس مشترک داخلی و خارجی آن ها ۲ و مجموع آن ها ۶ باشد، $r_1 r_2$ کدام است؟

بارم: ۱

(۲۵)

دشوار

تشریحی ۱۳۹۸

دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', r)$ مماس درونی اند. اگر مساحت ناحیه محدود میان آن ها 28π و طول خط المکزین آن ها برابر ۴ باشد، طول وتری از دایره بزرگ تر که مماس بر دایره کوچک تر و عمود بر خط المکزین دو دایره باشد، کدام است؟ ($R > r$)

بارم: ۱

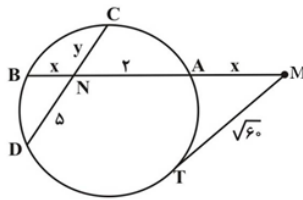
(۲۶)

در شکل روبه رو x و y را بیابید.

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۸

بارم: ۱



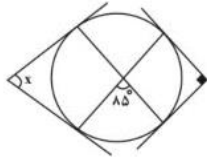
(۲۷)

در شکل زیر زاویه بین پاره خط هایی که نقاط تماس را به هم وصل کرده، ۸۵° است. زاویه x را به دست آورید.

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۹

بارم: ۲.۵



(۲۸)

ساده

تشریحی ۱۳۹۷

دو دایره $C(O, 1)$ و $C'(O', 7)$ مفروض اند. اگر $OO' = 10$ باشد، آنگاه نسبت طول مماس مشترک خارجی به مماس مشترک داخلی کدام است؟

بارم: ۱

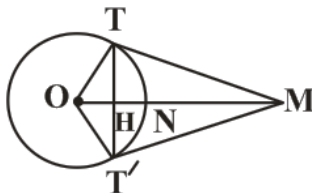
(۲۹)

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

در شکل زیر از نقطه M ، دو مماس MT و MT' بر دایره رسم شده است. اگر $MO = 6$ و H وسط ON باشد، شعاع دایره کدام است؟

بارم: ۱



(۳۰)

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

اگر دو دایره $C(O, a)$ و $C'(O', 2a)$ با طول خط‌المركزين $OO' = 4 - 2a$ دارای تنها یک مماس مشترک باشند، a برابر با کدام است؟

بارم: ۱

(۳۱)

متوسط

تشریحی ۱۳۹۶

نزدیک‌ترین فاصله نقاط دایره $C(O, 2)$ از نقاط دایره $C'(O', 4)$ برابر ۴ سانتی‌متر است. طول مماس مشترک داخلی دو دایره کدام است؟

بارم: ۱

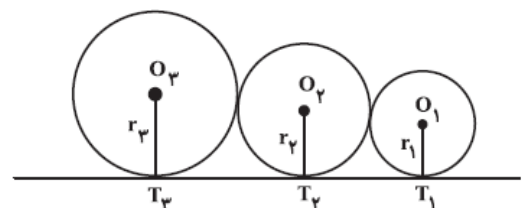
(۳۲)

دشوار

تشریحی ۱۳۹۸

سه دایره مطابق شکل زیر بر هم مماس می‌باشند و مراکز آن‌ها بر روی یک خط راست قرار دارند. اگر $r_2 = 2r_1$ و $r_2 T_1 T_2 = 2\sqrt{2}$ باشد، در این صورت اندازه r_3 کدام است؟

بارم: ۱

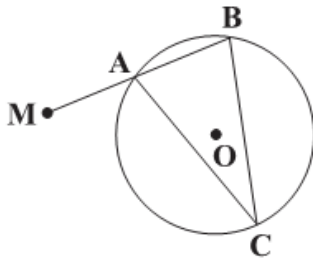


(۳۳)

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

در دایره زیر، قاطع MAB رسم شده است؛ به طوری که $MA = AB = 6$ و $\hat{BAC} = 75^\circ$. اگر $AC = CB$ باشد، فاصله نقطه M از مرکز دایره چقدر است؟



(۳۴)

متوسط

تشریحی ۱۳۹۶

کمترین و بیشترین فاصله نقطه A از محیط دایره (C) به ترتیب برابر ۵ و ۹ است. طول مماسی که از نقطه A بر دایره رسم شده است، چند برابر شعاع دایره است؟

بارم: ۲

(۳۵)

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

دو دایره $C(O, 5)$ و $C'(O', 3)$ به طول خط مرکزین ۱۰ مفروض اند.

(الف) با رسم شکل وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص کنید.

(ب) مجموع طول مماس مشترک های خارجی دو دایره را در صورت وجود محاسبه کنید.

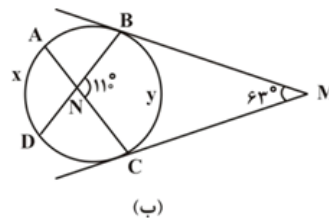
(۳۶)

ساده

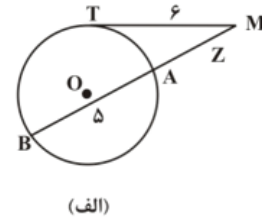
تشریحی قلمچی ۱۳۹۶

در هریک از شکل های زیر مقدار x و y و z را تعیین کنید.

بارم: ۲



(ب)



(الف)

(۳۷)

ساده

تشریحی ۱۳۹۶

اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع های ۱۴ و ۶، برابر ۱۵ واحد است. خطالمرکزین این دو دایره چند واحد است؟

بارم: ۱

(۳۸)

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

دو دایره به شعاع های ۴ و $x > 4$ مماس برون هستند از مرکز دایره کوچکتر مماسی بر دایره بزرگتر رسم کرده ایم. اگر طول این قطعه مماس ۱۰ باشد، شعاع دایره بزرگتر کدام است؟

بارم: ۱

(۳۹)

دشوار

تشریحی ۱۳۹۷

دو دایره C_1 و C_2 به شعاع های $r_1 = \frac{1}{4}$ و $r_2 = 3$ و طول خطالمرکزین $d = \frac{1}{4}$ می باشند. چند دایره به شعاع واحد وجود دارد که بر هر دو دایره مماس باشد؟

بارم: ۱

(۴۰)

متوسط

تشریحی ۱۳۹۶

طول خطالمرکزین دو دایره مماس درونی، برابر با ۴ سانتی متر و مساحت ناحیه محدود بین آن ها 32π سانتی مترمربع است. نسبت طول شعاع دایره بزرگ به شعاع دایره کوچک کدام است؟

بارم: ۱

(۴۱)

دشوار

تشریحی ۱۳۹۶

مساحت یک مثلث قائم الزاویه 84 cm^2 و محیط آن 56 cm می باشد. شعاع دایره محیطی این مثلث چند سانتی متر است؟

بارم: ۱

(۴۲)

متوسط

تشریحی ۱۳۹۶

در چهارضلعی $ABCD$ ، نیمسازهای داخلی زوایای A ، B و C ، همدیگر را در نقطه O قطع می کنند. چهارضلعی $ABCD$ لزوماً چگونه است؟

بارم: ۱

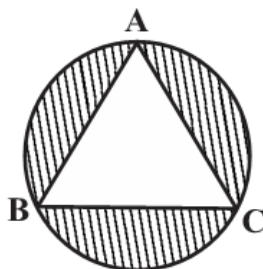
(۴۳)

دشوار

تشریحی ۱۳۹۶

در شکل زیر، ABC مثلث متساوی الاضلاعی به طول ضلع $\sqrt{3}$ است. مساحت ناحیه هاشورخورده، چند برابر مساحت مثلث ABC است؟

بارم: ۱



(۴۴)

دشوار

تشریحی ۱۳۹۷

در مثلث ABC به اضلاع $a = 2\sqrt{3}$ و $b = 3$ ، فاصله مرکز دایره محیطی مثلث تا ضلع a برابر یک واحد است. مجموع فاصله های این نقطه تا سه رأس مثلث کدام است؟

بارم: ۱

(۴۵)

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

شعاع دایره محاطی داخلی یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۶ کدام است؟

بارم: ۱

(۴۶)

دشوار

تشریحی ۱۳۹۸

یک دوزنقه متساوی الساقین با زاویه 60° بر دایره ای به شعاع R محیط شده است. محیط دوزنقه چند برابر R است؟

بارم: ۱

(۴۷)

دشوار

تشریحی ۱۳۹۶

بر دایره ای به شعاع R یک لوزی محیط شده است. اگر یکی از زاویه های لوزی 60° باشد، نسبت مساحت لوزی به مساحت دایره کدام است؟

بارم: ۱

(۴۸)

دشوار

تشریحی ۱۳۹۷

در یک دوزنقه متساوی الساقین، اندازه یکی از زاویه ها برابر 60° درجه است. نسبت اندازه شعاع دایره محیطی به شعاع دایره محاطی چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی این دوزنقه کدام است؟

بارم: ۱

(۴۹)

ساده

تشریحی ۱۳۹۹

در مثلثی با اضلاع ۷، ۲۴ و ۲۵، شعاع دایره محاطی خارجی مماس بر ضلع متوسط کدام است؟

بارم: ۱

(۵۰)

متوسط

تشریحی ۱۳۹۶

از برخورد نیمسازهای چهار زاویه داخلی چهارضلعی $ABCD$ فقط یک نقطه به دست می آید. چهارضلعی $ABCD$ لزوماً . . . است.

بارم: ۱

(۵۱)

دشوار

تشریحی ۱۳۹۷

شعاع دایره محیطی یک هشت ضلعی منتظم برابر یک است. اندازه شعاع دایره محاطی این هشت ضلعی کدام است؟

بارم: ۱

(۵۲)

دشوار

تشریحی ۱۳۹۶

در یک مثلث، اندازه ارتفاع ها برابر $\frac{2}{4}$ ، ۳ و ۴ و اندازه شعاع دو تا از دایره های محاطی خارجی برابر ۲ و ۶ می باشد. شعاع دایره محاطی خارجی دیگر کدام است؟

بارم: ۱

۵۳

متوسط تشریحی ۱۳۹۷

مساحت محدود بین دو دایره محیطی و محاطی داخلی مثلث متساوی‌الاضلاعی به محیط ۱۸ کدام است؟

بارم: ۱

۵۴

متوسط تشریحی ۱۳۹۷

در مثلثی به اضلاع ۴، ۵ و ۷، نسبت مساحت کوچک‌ترین دایره محاطی خارجی به مساحت دایره محاطی داخلی کدام است؟

بارم: ۱

۵۵

متوسط تشریحی ۱۳۹۷

در دایره‌ای به مساحت $4\pi\sqrt{3}$ ، مثلث متساوی‌الاضلاعی محاط شده است. مساحت مثلث کدام است؟

بارم: ۱

۵۶

متوسط تشریحی ۱۳۹۶

یک دایره به شعاع ۵ و دهضلعی‌های منتظم محیطی و محاطی آن را در نظر بگیرید. اگر a و b به ترتیب اندازه هر یک از اضلاع دهضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، حاصل $a - b$ کدام است؟ $(\cos 18^\circ \simeq 0/9, \sin 18^\circ \simeq 0/3)$

بارم: ۱

۵۷

متوسط تشریحی ۱۳۹۸

اگر مجموع عکس شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی مثلثی برابر ۲ و محیط مثلث برابر ۱۲ باشد، آن‌گاه مساحت این مثلث کدام است؟

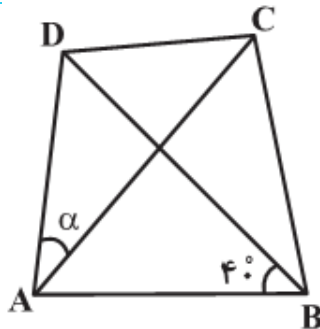
بارم: ۱

۵۸

ساده تشریحی ۱۳۹۶

چهارضلعی $ABCD$ محاطی است. اگر $\hat{ADC} = 102^\circ$ و $\hat{ABD} = 40^\circ$ باشد، آن‌گاه زاویه α چند درجه است؟

بارم: ۱



(۲) ۳۸
(۴) ۴۲

(۱) ۳۶
(۳) ۴۰

۵۹

متوسط تشریحی ۱۳۹۷

اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول یکی از اضلاع زاویه قائمه دو برابر دیگری باشد، نسبت شعاع دایره محاطی داخلی به شعاع دایره محاطی خارجی متناظر با وتر کدام است؟

بارم: ۱

۶۰

ساده تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۷

قضیه: ثابت کنید یک چهارضلعی محاطی است، اگر و تنها اگر دو زاویه مقابل آن مکمل یکدیگر باشند.

بارم: ۱.۲۵

ساده

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۱

می‌دانیم اگر از هر نقطه خارج یک دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم طول مماس‌ها مساوی است. پس:

$$\left. \begin{array}{l} MT = MT_1 \\ MT = MT_2 \\ MT = MT_3 \\ MT = MT_4 \end{array} \right\} \rightarrow MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4$$

متوسط

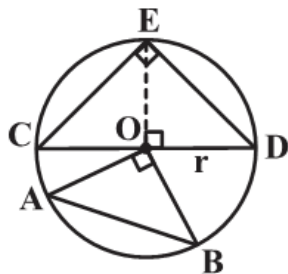
تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۲

با توجه به این که $\hat{E}$ روبه‌رو به قطر CD بوده و همچنین $CE = DE$ می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که

قائم الزاویه متساوی الساقین: $\triangle CED$



$$\Rightarrow S_{\triangle CED} = \frac{1}{2} OE \cdot CD = \frac{1}{2} r(2r) = r^2$$

از طرفی کمان $\widehat{AB}$ ، $\frac{1}{4}$ محیط دایره می‌باشد، لذا با فرض $\widehat{AOB} = \alpha$ داریم:

$$\widehat{AB} = \frac{\pi r}{180} \alpha = \frac{1}{4} (2\pi r) \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

$\Rightarrow \widehat{AOB} = 90^\circ$ و $OA = OB = r \Rightarrow \triangle AOB$ قائم الزاویه متساوی الساقین

$$\Rightarrow S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \times r \times r = \frac{r^2}{2}$$

بنابراین:

$$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle CED}} = \frac{\frac{r^2}{2}}{r^2} = \frac{1}{2}$$

ساده

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۳

$\widehat{AOB}$ زاویه‌ی خارجی $\triangle ODB$ است پس $\widehat{AOB} = \widehat{ODB} + \widehat{OBD}$. چون مثلث BOD متساوی الساقین است $\widehat{ODB} = \widehat{OBD}$; پس $\widehat{AOB} = 2\widehat{ODB}$; بنابراین $y = \widehat{ODB}$ و $x = \widehat{OBD}$ می‌باشد.

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

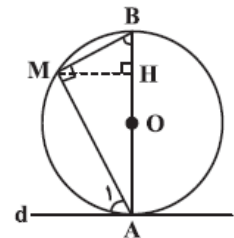
گزینه درست: null

سوال ۴

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \frac{\widehat{AM}}{r} \text{ (ظلی)} \\ \hat{ABM} = \frac{\widehat{AM}}{r} \text{ (محاطی)} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{ABM}$$

$$\Rightarrow 3\alpha + 15^\circ = 5\alpha - 25^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = 60^\circ + 15^\circ = 75^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{BAM} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$$



از طرفی می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه با زاویه حاده 15° ، طول ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{1}{4}$ طول وتر است. پس:

$$MH = \frac{1}{4} AB = \frac{1}{4} \times 8 = 2$$

متوسط

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۸

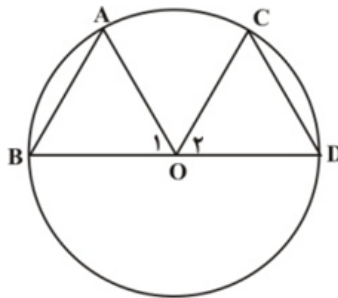
گزینه درست: null

سوال ۵

(الف)

$$\begin{aligned} \widehat{M} &= \frac{AB - CD}{2} \\ \widehat{N} &= \frac{AB + CD}{2} \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} AB - CD = 62^\circ \\ AB + CD = 182^\circ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} AB = 122^\circ \\ CD = 60^\circ \end{cases}$$

$$\text{است محاطی } \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\widehat{CD}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$



(ب)

$$\triangle OAB, \triangle OCD : \begin{cases} OA = OD = R \\ OB = OC = R \\ AB = CD \text{ (فرض طبق)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle AOB \cong \triangle OCD \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

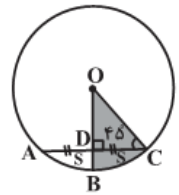
دشوار

تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۶

شعاع OB از دایره، وتر AC و کمان متناظر آن را نصف می‌کند، پس بر آن عمود است. مثلث ODC قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، بنابراین:



$$R = OC = DC\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

حال با توجه به شکل داریم:

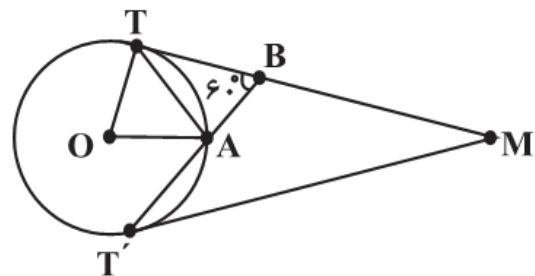
$$\text{مساحت ناحیه رنگی} = \text{مساحت قطاع BOC} = \frac{45}{360} \pi \times (4\sqrt{2})^2 = 4\pi$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۷



در مثلث BMT' ، زاویه TBT' زاویه خارجی است، بنابراین داریم:

$$\widehat{BT'M} = \widehat{TBT'} - \widehat{BMT'} = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$$

زاویه $BT'M$ ، زاویه ظلی بوده و برابر نصف کمان AT' است و از آن‌جا که A وسط $\widehat{TT'}$ است، داریم:

$$\widehat{AT} = \widehat{AT'} = 2 \times 40^\circ = 80^\circ$$

پس نسبت مساحت قطاع AOT به مساحت دایره برابر $\frac{80}{360}$ است. پس مساحت قطاع AOT برابر است با:

$$\frac{80}{360} \times \pi r^2 = \frac{4\pi r^2}{18}$$

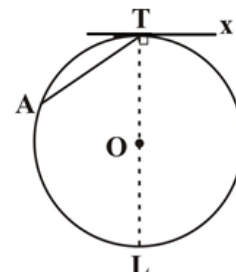
متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۸

طابق شکل، زاویهٔ ظلّی منفرجهٔ ATX را در نظر گرفته، قطر گذرنده از T را رسم می کنیم. داریم:



$$\widehat{LTx} = 90^\circ = \frac{\widehat{TL}}{2}$$

$$\widehat{ATL} = \frac{\widehat{AL}}{2} \quad (\text{محاطی})$$

$$\Rightarrow \widehat{ATx} = \widehat{ATL} + \widehat{LTx} = \frac{\widehat{AL}}{2} + \frac{\widehat{TL}}{2} = \frac{\widehat{ALT}}{2}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۹

زوایای A و D محاطی هستند، بنابراین داریم:

$$\hat{A} = \frac{\widehat{DE} + \widehat{DC} + \widehat{BC}}{2} \qquad \hat{D} = \frac{\widehat{AE} + \widehat{AB} + \widehat{BC}}{2}$$

$$\hat{A} + \hat{D} = \frac{\widehat{DE} + \widehat{DC} + \widehat{BC} + \widehat{AE} + \widehat{AB} + \widehat{BC}}{2}$$

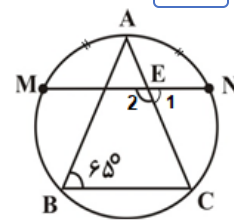
$$= \frac{360^\circ + \widehat{BC}}{2} = \frac{360^\circ + 70^\circ}{2} = \frac{430^\circ}{2} = 215^\circ$$

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۱۰



$$\hat{B} = \frac{\widehat{ANC}}{2} \xrightarrow{\hat{B}=65^\circ} \widehat{ANC} = 130^\circ$$

$$\widehat{AN} + \widehat{NC} = 130^\circ$$

$$\xrightarrow{\widehat{AN}=\widehat{AM}} \widehat{AM} + \widehat{NC} = 130^\circ$$

در نتیجه:

$$\hat{E}_1 = \frac{\widehat{AM} + \widehat{NC}}{2} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$$

از طرفی داریم:

$$\hat{E}_2 = 180^\circ - \hat{E}_1 = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۱۱

می‌دانیم که مساحت یک قطاع از یک دایره با زاویه مرکزی θ (بر حسب درجه) برابر با $\frac{\theta}{360} \pi R^2$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\text{مساحت قطاع } AOB = \frac{1}{8} \times \pi \times 8^2 = 8\pi$$

$$\text{مساحت مثلث } OAB = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \sin(45^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 16\sqrt{2}$$

$$\text{مساحت ناحیه هاشورخورده} = 8\pi - 16\sqrt{2} = 16\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\right)$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۱۲

مثلث‌های OAH و OCK قائم‌الزاویه هستند و در نتیجه بنابر قضیه فیثاغورس داریم:



$$OA^2 = OH^2 + AH^2$$

$$\Rightarrow OA = \sqrt{6 + 25} = \sqrt{31} = R = OC$$

از طرفی:

$$OC^2 = OK^2 + CK^2 \Rightarrow 31 = 9 + CK^2 \Rightarrow CK = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

در نتیجه:

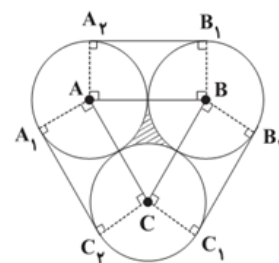
$$CD = 2CK = 4\sqrt{5}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۱۳



فرض می‌کنیم شعاع دایره‌ها برابر r باشد. پاره‌خط‌های AA_2 و BB_1 بر A_2B_1 عمود هستند. پس با هم موازی‌اند و هر دو برابر $2r$ هستند. پس چهارضلعی ABB_1A_2 مستطیل است و بنابراین داریم:

$$A_2B_1 = AB = 2r$$

و به طریق مشابه داریم: $BC = AC = 2r$

و به طریق مشابه داریم:

برای زاویه A_1AA_2 داریم:

$$A_1\hat{A}A_2 = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \hat{BAC} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

بنابراین طول کمان A_1A_2 برابر $\frac{120^\circ}{360^\circ}$ محیط دایره است. پس برای مجموع طول کمان‌های $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2$ نتیجه می‌گیریم که برابر محیط

یک دایره کامل است: $\text{محیط دایره} = 2\pi r$

پس طول نخ برابر $(2r + 2r + 2r + 2\pi r)$ است.

برای مساحت هاشورخورده داریم:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\text{هاشور خورده}} + 3S_{\text{دایره ۶۰ درجه}}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} (2r)^2 = \sqrt{3}r^2$$

$$S_{\text{دایره ۶۰ درجه}} = \frac{S_{\text{دایره}}}{6} = \frac{\pi r^2}{6}$$

$$\Rightarrow S_{\text{هاشور خورده}} = \sqrt{3}r^2 - 3\left(\frac{\pi r^2}{6}\right) = \sqrt{3}r^2 - \frac{\pi r^2}{2}$$

با توجه به این که مساحت هاشورخورده برابر $(4\sqrt{3} - 2\pi)$ است، شعاع برابر 2 می‌شود و طول نخ برابر $(12 + 4\pi)$ خواهد بود.

ساده

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۱۴

$$\left. \begin{aligned} \hat{P} &= \frac{\hat{BD} - \hat{AC}}{2} \\ \hat{M} &= \frac{\hat{AC}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{P} + \hat{M} = \frac{\hat{BD}}{2} = \frac{2\hat{MB}}{2} = \hat{MB}$$

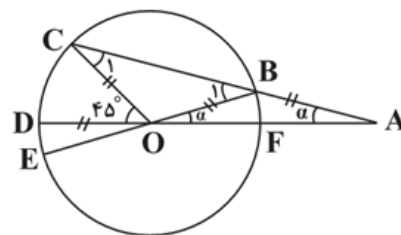
$$\Rightarrow \hat{MB} = 50^\circ \Rightarrow \hat{BAM} = \frac{\hat{MB}}{2} = 25^\circ$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۱۵



(شعاع دایره) $AB \Rightarrow AB = OB$ نصف قطر دایره است.

بنابراین مثلث OAB متساوی الساقین است و زاویه B_1 زاویه خارجی آن، برابر 2α است.

از طرفی $OB = OC$ و مثلث BOC متساوی الساقین است، در نتیجه:

$$\hat{B}_1 = \hat{C}_1 = 2\alpha$$

زاویه مرکزی COD برای مثلث OAC زاویه خارجی محسوب می‌شود، که برابر است با:

$$\widehat{COD} = \hat{A} + \hat{C}_1 = \alpha + 2\alpha = 3\alpha = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = 15^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 = 2\alpha = 30^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{زاویه ی محاطی است } \hat{B}_1} \widehat{CE} = 2\hat{B}_1 = 60^\circ$$

ساده

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۱۶

(الف) نادرست X

(ب) نادرست X

(پ) درست ✓

(ت) درست ✓

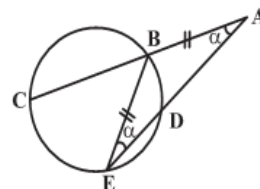
ساده

تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۱۷

اگر $AB = BE$ باشد، آن‌گاه $\hat{BAE} = \hat{BEA} = \alpha$ است. طبق روابط زاویه محاطی و زاویه بین امتداد دو وتر داریم:



$$(\text{زاویه محاطی}) \quad \widehat{BED} = \frac{\widehat{BD}}{2} = \alpha \Rightarrow \widehat{BD} = 2\alpha \quad (*)$$

$$\widehat{BAE} = \frac{\widehat{CE} - \widehat{BD}}{2} = \alpha \xrightarrow{(*)} \widehat{CE} - 2\alpha = 2\alpha$$

$$\Rightarrow \widehat{CE} = 4\alpha \Rightarrow \frac{\widehat{CE}}{\widehat{BD}} = 2$$

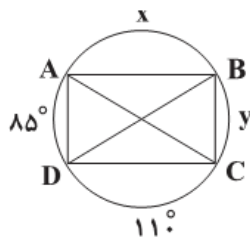
متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۱۸

می‌دانیم کمان‌های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند. پس:



$$AC = BD \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{BAD} \\ \Rightarrow x + y = 85^\circ + x \Rightarrow y = 85^\circ$$

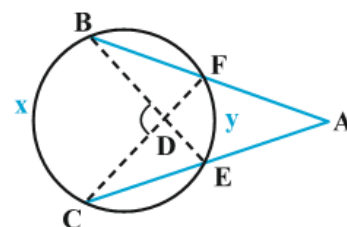
$$x + 85^\circ + 85^\circ + 11^\circ = 360^\circ \Rightarrow x = 360^\circ - 281^\circ = 79^\circ$$

ساده

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۱۹

با فرض $\widehat{BC} = x$ و $\widehat{EF} = y$ داریم:

$$\begin{cases} \hat{A} = \frac{x-y}{2} = 27^\circ \Rightarrow x-y = 54^\circ \\ \hat{D} = \frac{x+y}{2} = 71^\circ \Rightarrow x+y = 142^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x = 196^\circ \Rightarrow x = 98^\circ$$

ساده

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۲۰

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} \Rightarrow 18 = \frac{3 \times R^2 \times 60^\circ}{360^\circ}$$

$$\Rightarrow R^2 = 36 \Rightarrow R = 6$$

$$\text{طول کمان AB} : L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ} = \frac{3 \times 6 \times 60^\circ}{180^\circ} = \frac{3 \times 6}{3} = 6$$

متوسط

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۲۱

$$R - R' = 3$$

$$\text{مساحت محدود بین دو دایره} = \pi R^2 - \pi R'^2 = 21\pi \rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \pi(R + R')(R - R') &= 21\pi \\ R - R' &= 3 \end{aligned} \right\} \rightarrow R + R' = 7$$

$$\begin{cases} R - R' = 3 \\ R + R' = 7 \end{cases} \rightarrow R = 5, R' = 2$$

دشوار

تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۲۲

با توجه به این که طول مماس مشترک دو دایره مماس برون به

شعاع‌های r_1 و r_2 برابر $2\sqrt{r_1 r_2}$ است، داریم:

$$2\sqrt{2 \times 8} = 2\sqrt{2r} + 2\sqrt{8r} \Rightarrow \sqrt{16} = \sqrt{2r} + \sqrt{8r}$$

$$\Rightarrow \sqrt{16} = \sqrt{2}\sqrt{r} + 2\sqrt{2}\sqrt{r} \Rightarrow 3\sqrt{2}\sqrt{r} = \sqrt{16} \Rightarrow r = \frac{16}{9 \times 2} = \frac{8}{9}$$

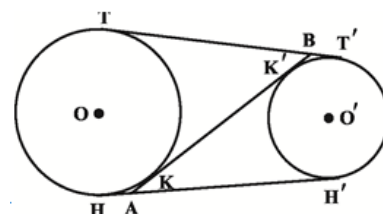
دشوار

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۲۳

با توجه به این که $d > R + R'$ ، پس دو دایره نسبت به هم متخارج‌اند. از طرفی می‌دانیم طول مماس‌های مرسوم بر یک دایره، از نقطه‌ای خارج از آن، با یکدیگر برابرند. در نتیجه:



$$\left. \begin{array}{l} AK = AH, \quad AK' = AH' \\ BK' = BT', \quad BK = BT \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow AK + BK + AK' + BK' = AH + BT + AH' + BT'$$

$$\Rightarrow 2AB = TT' + HH'$$

همچنین می‌دانیم طول دو مماس مشترک خارجی دایره‌ها با یکدیگر برابر است ($TT' = HH'$)، بنابراین:

$$2AB = 2TT' \Rightarrow AB = TT'$$

لذا برای محاسبه طول AB ، کافیه طول مماس مشترک خارجی دو دایره را به دست آوریم:

$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} = \sqrt{13^2 - (8 - 3)^2} = \sqrt{144} = 12$$

$$\Rightarrow AB = 12$$

دشوار

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۲۴

فرض کنید طول مماس مشترک خارجی برابر x و طول مماس مشترک داخلی برابر y باشد، داریم:

$$x = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2} \Rightarrow x^2 = d^2 - (r_1 - r_2)^2$$

$$y = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2} \Rightarrow y^2 = d^2 - (r_1 + r_2)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2$$

$$= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 - r_1^2 - r_2^2 + 2r_1 r_2 = 4r_1 r_2$$

می‌دانیم $x - y = 2$ و $x + y = 6$ است. داریم:

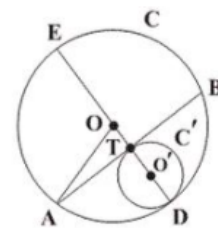
$$4r_1 r_2 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 2 \times 6 = 12 \Rightarrow r_1 r_2 = 3$$

دشوار

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۲۵



$$S = S_{\text{دایره } O} - S_{\text{دایره } O'} = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$= \pi(R^2 - r^2) = \pi(R - r)(R + r) = 28\pi$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} (R - r)(R + r) &= 28 \\ \text{خط مرکزین } OO' &= R - r = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R + r = 7 \begin{cases} R + r = 7 \\ R - r = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 5/2 \\ r = 1/2 \end{cases}$$

$$OA = R = 5/2, OT = R - r = 2$$

$$\triangle ATO : AT^2 = OA^2 - OT^2 = (5/2)^2 - (2)^2$$

$$= (5/2 - 2)(5/2 + 2) = 3 \Rightarrow AT = \sqrt{3} \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}$$

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۲۶

$$MT^2 = MA \times MB \Rightarrow (\sqrt{6})^2 = x(2x + 2) \rightarrow x(x + 1) = 3 \rightarrow x = 2$$

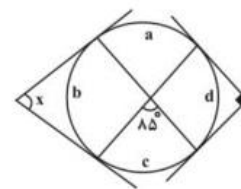
$$NB \times NA = NC \times ND \Rightarrow x \times 2 = y \times 5 \rightarrow y = 2$$

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۲۷



با توجه به شکل داریم:

$$180^\circ = \frac{a + c}{2} \Rightarrow a + c = 180^\circ$$

$$90^\circ = \frac{(a + b + c) - d}{2} \Rightarrow 180^\circ = 180^\circ + (b - d) \Rightarrow b - d = 0^\circ$$

$$x = \frac{(a + d + c) - b}{2} \rightarrow x = \frac{(a + c) - (b - d)}{2} \Rightarrow x = \frac{180^\circ - 0^\circ}{2} = 90^\circ$$

ساده

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۲۸

طبق روابط مماس مشترک داریم:

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2}$$

$$= \sqrt{10^2 - (7 - 1)^2} = 8$$

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2}$$

$$= \sqrt{10^2 - (7 + 1)^2} = 6$$

$$\Rightarrow \frac{\text{طول مماس مشترک خارجی}}{\text{طول مماس مشترک داخلی}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۲۹

می‌دانیم طول مماس های رسم شده از یک نقطه خارج دایره با هم برابرند. بنابراین $MT = MT'$ ، از طرفی $OT = OT'$ است، پس نقاط M و O روی عمودمنصف پاره خط TT' واقعاند؛ یعنی OM عمودمنصف پاره خط TT' است و در نتیجه بر آن عمود است. بنابراین ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه OTM است و داریم:

$$OT^2 = OH \times OM \Rightarrow R^2 = \frac{R}{2} \times 6 \Rightarrow R = 3$$

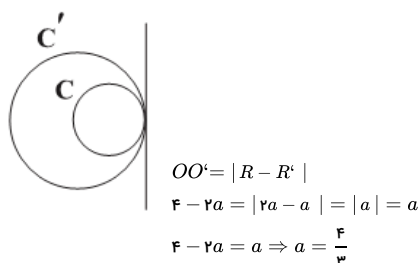
متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۳۰

چون دو دایره دارای یک مماس مشترک می‌باشند، قطعاً مماس درون هستند.

توجه داشته باشید که a طول شعاع دایره بوده، پس مثبت خواهد بود.

متوسط

تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۳۱



$$d = OO' = R' + AB + R = 4 + 4 + 2 = 10$$

اگر TT' طول مماس مشترک داخلی دو دایره باشد:

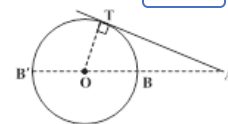
$$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} = \sqrt{10^2 - 3^2} = 8$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۳۴



$$\left. \begin{array}{l} AB = 5 \\ AB' = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} AO - R = 5 \\ AO + R = 9 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} AO = 7 \\ R = 2 \end{array} \right.$$

$$\triangle AOT \xrightarrow{\hat{T}=90^\circ} AT = \sqrt{OA^2 - OT^2} = \sqrt{7^2 - 2^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \frac{AT}{R} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

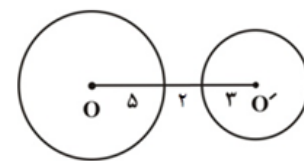
متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۳۵

(الف) دو دایره نسبت به هم متخارج اند $\Rightarrow d > r + r' \Rightarrow d = 10$ خط مرکزین



(ب) اگر TT' مماس مشترک خارجی دو دایره باشد، آنگاه:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (r - r')^2} \Rightarrow TT' = \sqrt{10^2 - 3^2} = 7\sqrt{6}$$

از طرفی می دانیم طول دو مماس مشترک خارجی، با هم برابر است و از یک رابطه محاسبه می شود. بنابراین:

$$مجموع طول مماس مشترک های خارجی = 2TT' = 14\sqrt{6}$$

ساده

تشریحی قلمچی ۱۳۹۶

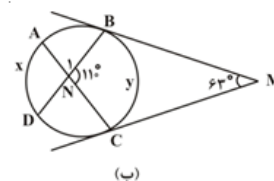
گزینه درست: null

سوال ۳۶

(الف)

$$MT^r = AM \cdot BM \rightarrow 6^r = Z(Z + 5) \rightarrow Z = -9 \quad Z = 4, \text{ غ ق ق}$$

(ب)



$$\left. \begin{aligned} \hat{N}_1 &= \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} \\ \hat{N}_1 &= 18^\circ - 11^\circ = 7^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \widehat{AB} + \widehat{CD} = 14^\circ \rightarrow x + y = 36^\circ - 14^\circ = 22^\circ$$

$$\widehat{BMC} = \frac{\widehat{BADC} - \widehat{BC}}{2} \rightarrow 63^\circ = \frac{x + \widehat{AB} + \widehat{DC} - y}{2} \rightarrow y - x = 14^\circ$$

$$\begin{cases} x + y = 22^\circ \\ y - x = 14^\circ \end{cases} \rightarrow y = 117^\circ, x = 103^\circ$$

ساده

تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۳۷

می‌دانیم اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ (در صورت وجود) برابر است با: $\sqrt{OO'^2 - (R - R')^2}$. لذا برای این دو دایره داریم:

$$\sqrt{OO'^2 - (14 - 6)^2} = 15 \Rightarrow OO'^2 - 64 = 225$$

$$\Rightarrow OO'^2 = 289 \Rightarrow OO' = 17$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

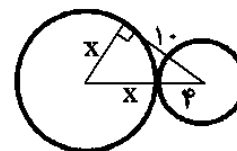
سوال ۳۸

می‌دانیم شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

$$(x + 4)^2 = x^2 + 10^2$$

$$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 100$$

$$x = \frac{84}{8} = \frac{21}{2} = 10.5$$



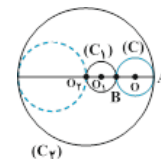
دشوار

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۳۹

چون $d < |r_1 - r_2|$ ، پس دو دایره متداخل‌اند، به‌طوری که دایره کوچکتر یعنی C_1 درون دایره بزرگتر یعنی C_2 قرار دارد، دایره $C(O, R)$ که در شکل نشان داده شده بر هر دو دایره مماس است و شعاع آن برابر است با:



$$R = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} (r_2 - 2r_1) = \frac{1}{2} (3 - 1) = 1$$

توجه کنید که در شکل بالا، دایره‌ای که به صورت خط‌چین نشان داده شده نیز بر هر دو دایره C_1 و C_2 مماس است اما شعاع آن برابر واحد نیست، زیرا شعاع آن برابر است با: $\frac{1}{2} r_2 = 1/5$ ، پس یک دایره به شعاع واحد وجود دارد که بر هر دو دایره C_1 و C_2 مماس است. شعاع بقیه دایره‌هایی که بر دو دایره مماس هستند، عددی بین ۱ و ۱/۵ است.

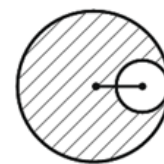
متوسط

تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۴۰

می‌دانیم خط‌المرکزین دو دایره مماس درون برابر با تفاضل اندازه شعاع دایره‌ها است:



$$d = R - r = 4 \quad (1)$$

از طرفی مساحت ناحیه هاشور خورده برابر است با:

مساحت دایره کوچک - مساحت دایره بزرگ = مساحت ناحیه هاشورخورده

$$= \pi R^2 - \pi r^2$$

$$\pi(R^2 - r^2) = 32\pi \Rightarrow R^2 - r^2 = 32 \Rightarrow (R - r)(R + r) = 32$$

$$\xrightarrow{R-r=4} 4(R + r) = 32 \Rightarrow R + r = 8 \quad (2)$$

از (۱) و (۲) داریم:

$$R = 6, r = 2 \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{6}{2} = 3$$

دشوار

تشریحی ۱۳۹۶

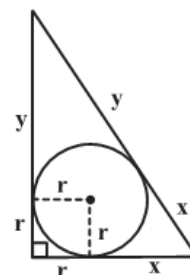
گزینه درست: null

سوال ۴۱

$$r = \frac{S}{p} = \frac{۸۴ \text{ cm}^2}{۲۸ \text{ cm}} = ۳ \text{ cm} \quad (\text{شعاع دایره محاطی})$$

$$۲x + ۲y + ۲r = ۵۶ \text{ cm} \Rightarrow x + y = ۲۵ \text{ cm}$$

چون محل هم‌رسی عمود منصف‌های اضلاع مثلث قائم‌الزاویه (مرکز دایره محیطی) وسط وتر آن است، شعاع دایره محیطی برابر نصف وتر یعنی $۱۲/۵ \text{ cm}$ است.



متوسط

تشریحی ۱۳۹۶

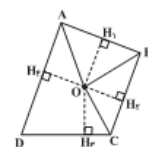
گزینه درست: null

سوال ۴۲

$$O \in \widehat{A} \text{ داخلی نیمساز} \Rightarrow OH_1 = OH_4$$

$$O \in \widehat{B} \text{ داخلی نیمساز} \Rightarrow OH_1 = OH_2$$

$$O \in \widehat{C} \text{ داخلی نیمساز} \Rightarrow OH_2 = OH_3$$



از سه رابطه فوق می‌توان نتیجه گرفت $OH_2 = OH_4$ ، یعنی نقطه O روی نیمساز داخلی زاویه D قرار دارد و در نتیجه نیمسازهای داخلی زوایای چهارضلعی $ABCD$ در نقطه O هم‌رسند. بنابراین چهارضلعی $ABCD$ قطعاً محیطی است ولی در مورد محاطی بودن آن نمی‌توان به‌درستی اظهار نظر کرد.

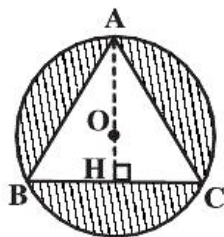
دشوار

تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۴۳

مساحت ناحیه هاشورخوردۀ معادل تفاضل مساحت دایره محیطی مثلث ABC و مساحت مثلث ABC است. از طرفی داریم:



$$\left. \begin{aligned} AH &= \frac{\sqrt{3}}{2} AC \\ OA &= \frac{2}{3} AH \end{aligned} \right\} \Rightarrow AO = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} AC = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} = 1$$

بنابراین:

$$S_{\text{هاشورخورده}} = S_{\text{دایره}} - S_{\text{مثلث}} = \pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} (AC)^2$$

$$= \pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{S_{\text{هاشور خورده}}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{3\sqrt{3}}{4}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} - 1$$

دشوار

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

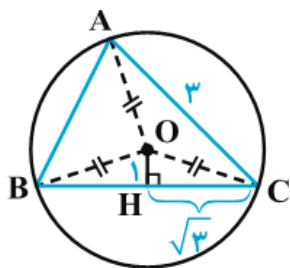
سوال ۴۴

می‌دانیم مرکز دایره محیطی مثلث، محل هم‌رسی عمودمنصف‌های ضلع‌های آن است.

$$\triangle ABC : OA = OB = OC = R$$

$$\Rightarrow \triangle OCH : R^2 = 1 + 3 \Rightarrow R^2 = 4$$

$$\Rightarrow R = 2 \Rightarrow OA + OB + OC = 3R = 6$$



متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۴۵

اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط $2P$ ، شعاع دایره محاطی داخلی برابر r باشد، داریم: (*) $S = rP$

از طرفی برای مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ داریم:

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (6)^2 = 9\sqrt{3} \\ 2P &= 3 \times 6 \Rightarrow P = 9 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(*)} 9\sqrt{3} = r \times 9 \Rightarrow r = \sqrt{3}$$

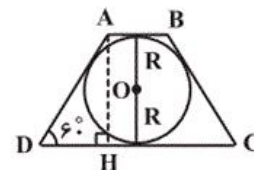
دشوار

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۴۶

مطابق شکل طول ارتفاع AH برابر $2R$ است. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه AHD ، ضلع AH روبه‌رو به زاویه 60° است، پس طول آن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ طول وتر است. در نتیجه داریم:



$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AD \Rightarrow 2R = \frac{\sqrt{3}}{2} AD$$

$$\Rightarrow AD = \frac{4}{\sqrt{3}} R = \frac{4\sqrt{3}}{3} R$$

با توجه به محیطی بودن چهارضلعی $ABCD$ ، رابطه $AB + CD = AD + BC$ بین اضلاع برقرار است، پس محیط چهارضلعی $ABCD$ برابر است با:

$$ABCD_{\text{محیط}} = (AB + CD) + (AD + BC)$$

$$= 2AD + 2AD = 4AD = \frac{16\sqrt{3}}{3} R$$

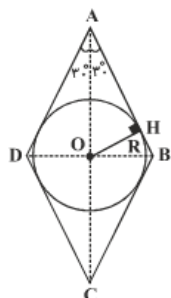
دشوار

تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۴۷

در لوزی، قطرهای نیم‌سازهای زوایا نیز می‌باشند. پس مرکز دایره همان نقطه برخورد قطرهای لوزی است. در نتیجه داریم:



$$\triangle OAH : \sin 30^\circ = \frac{OH}{OA} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{R}{OA} \Rightarrow OA = 2R$$

$$\triangle OAB : \tan 30^\circ = \frac{OB}{OA} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{OB}{2R} \Rightarrow OB = \frac{2\sqrt{3}}{3} R$$

$$\frac{S_{(ABCD)}}{S_{\text{دایره}}} = \frac{\frac{1}{2} AC \times BD}{\pi R^2} = \frac{\frac{1}{2} (2OA \times 2OB)}{\pi R^2}$$

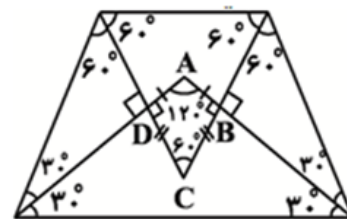
$$= \frac{\frac{1}{2} (2 \times 2R \times 2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} R)}{\pi R^2} = \frac{8\sqrt{3}}{3\pi}$$

دشوار

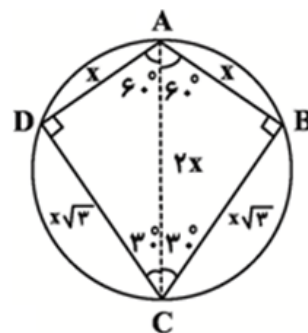
تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۴۸



مطابق شکل از برخورد نیمسازهای داخلی یک دوزنقه متساوی الساقین یک کایت قائم الزاویه به دست می‌آید که دارای زاویه ۶۰ درجه است. با توجه به شکل داریم:



در کایت $ABCD$ ، قطر AC روبه‌رو به زاویه ۹۰ درجه می‌باشد، پس قطر دایره محیطی است.

$$R = \frac{AC}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

حال با توجه به رابطه شعاع دایره محیطی داریم:

$$r = \frac{S}{P} = \frac{AB \times BC}{AB + BC} = \frac{(x) \times (x\sqrt{3})}{(x) + (x\sqrt{3})} = \frac{x\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{x}{\frac{x\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$

ساده

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۴۹

$$a = 7, b = 24, c = 25$$

$$P = \frac{a + b + c}{2} = 28$$

با توجه به اینکه $25^2 = 24^2 + 7^2$ ، مثلث قائم‌الزاویه است و طول اضلاع قائمه آن ۲۴ و ۷ است، داریم:

$$S = \frac{7 \times 24}{2} = 84$$

$$\Rightarrow r_b = \frac{S}{P - a} = \frac{84}{28 - 24} = \frac{84}{4} = 21$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۵۰

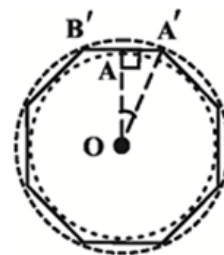
در هر چهارضلعی محیطی، نیمسازهای چهار زاویه داخلی، همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند که این نقطه مرکز دایره محیطی چهارضلعی است.

دشوار

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۵۱



دایره‌های محاطی و محیطی هشت ضلعی منتظم را رسم می‌کنیم. مطابق شکل، OA شعاع دایره محاطی و OA' شعاع دایره محیطی این هشت ضلعی هستند. می‌دانیم OA عمودمنصف $A'B'$ است، پس:

$$\angle AOA' = \frac{1}{2} \angle AOB' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} (360^\circ) \right) = 22/5^\circ$$

در نتیجه:

$$\cos(\angle AOA') = \frac{OA}{OA'} \Rightarrow \cos(22/5^\circ) = \frac{OA}{1} \\ \Rightarrow OA = \cos(22/5^\circ)$$

دشوار

تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۵۲

اگر r_a ، r_b و r_c شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، داریم:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} \quad (1)$$

و همچنین اگر h_a ، h_b و h_c اندازه‌های سه ارتفاع باشند، داریم:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2)} \frac{1}{\frac{1}{2/3}} + \frac{1}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\frac{1}{6}} = \frac{5}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{1}{r} \Rightarrow r = 1$$

$$\xrightarrow{(1)} \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{6}} + \frac{1}{r_c} = 1 \Rightarrow \frac{1}{r_c} = \frac{1}{3} \Rightarrow r_c = 3$$

متوسط

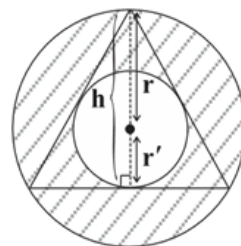
تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۵۳

$a = ۶$ (ضلع مثلث) $\Rightarrow$ محیط مثلث متساوی الاضلاع

ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع برابر $h = \frac{a\sqrt{3}}{۲}$ است که مطابق شکل مجموع شعاع دو دایره محیطی و محاطی داخلی برابر اندازه این ارتفاع است $(h = r + r')$. شعاع دایره محیطی $\frac{۲}{۳}$ ارتفاع و شعاع دایره محاطی داخلی $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع است.



$$a = ۶ \Rightarrow h = \frac{۶\sqrt{3}}{۲} = ۳\sqrt{3}$$

$$r = \frac{۲}{۳}h \Rightarrow r = \frac{۲}{۳} \times ۳\sqrt{3} \Rightarrow r = ۲\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S = \pi r^2 = \pi (۲\sqrt{3})^2 = ۱۲\pi$$

$$r' = \frac{۱}{۳}h \Rightarrow r' = \frac{۱}{۳} \times ۳\sqrt{3} \Rightarrow r' = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S' = \pi r'^2 = \pi (\sqrt{3})^2 = ۳\pi$$

$$S_{\text{هاشور خورده}} = S - S' = ۱۲\pi - ۳\pi = ۹\pi$$

دشوار

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۵۴

شعاع دایره محاطی داخلی برابر $r = \frac{S}{p}$ و شعاع دایره محاطی خارجی متناظر با رأس A برابر $r_a = \frac{S}{p-a}$ است. برای آن که شعاع دایره محاطی خارجی کوچکتر باشد، باید ضلع a کوچکترین ضلع مثلث باشد:

$$p = \frac{۷+۵+۴}{۲} = ۸$$

$$\begin{cases} r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{S}{۸-۴} = \frac{S}{۴} \\ r = \frac{S}{p} = \frac{S}{۸} \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \frac{r_a}{r} = \frac{\frac{S}{۴}}{\frac{S}{۸}} = ۲$$

$$\frac{S_{\text{دایره محاطی خارجی}}}{S_{\text{دایره محاطی داخلی}}} \Rightarrow \frac{r_a}{r} = \frac{\frac{S}{۴}}{\frac{S}{۸}} = ۲$$

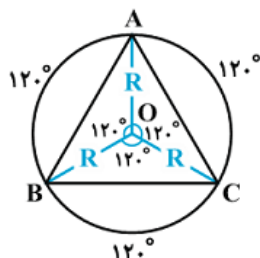
دشوار

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۵۵

رأس‌های مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ، محیط دایره را به سه کمان برابر به اندازه $۱۲۰^\circ = \frac{۳۶۰^\circ}{۳}$ تقسیم می‌کنند. پس اگر از O مرکز دایره به رؤس A ، B و C وصل کنیم، سه زاویه مرکزی به اندازه ۱۲۰° تشکیل می‌شود.



$$S_{\text{دایره}} = \pi R^2 = \pi R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{4\pi}{\pi} = 4 \Rightarrow R = 2$$

$$S(\triangle ABC) = 3S(\triangle AOB) = 3\left(\frac{1}{2} R \times R \times \sin 120^\circ\right)$$

$$S(\triangle ABC) = \frac{3}{2} R^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \times 4 = 3\sqrt{3}$$

دشوار

تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۵۶

در حالت کلی برای یک دایره به شعاع r و n ضلعی‌های منتظم محیطی و محاطی آن، که در آن a و b به ترتیب اندازه هر یک از اضلاع n ضلعی منتظم محیطی و محاطی می‌باشند، داریم:

$$a = 2r \tan \frac{180^\circ}{n} \quad \text{و} \quad b = 2r \sin \frac{180^\circ}{n}$$

بنابراین:

$$b = 2r \sin \frac{180^\circ}{10} \Rightarrow b = 2 \times 5 \times \sin 18^\circ = 2 \times 5 \times \frac{1}{10} = 1$$

از طرفی داریم:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \tan 18^\circ = \frac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{1/10}{9/10} = \frac{1}{9}$$

بنابراین:

$$a = 2r \tan \frac{180^\circ}{n} \Rightarrow a = 2 \times 5 \times \tan 18^\circ = 2 \times 5 \times \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$$

در نتیجه:

$$a - b = \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۵۷

طبق تمرین ۵ صفحه ۲۹ کتاب درسی داریم:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

بنابراین با توجه به فرض سؤال می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{r} = 2 \Rightarrow r = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S}{P} = \frac{1}{2} \xrightarrow{P=12} \frac{S}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow S = 3$$

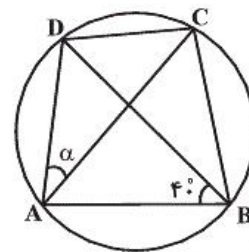
ساده

تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۵۸

اگر دایره محیطی چهارضلعی را رسم کنیم، داریم:



$$(\text{زاویه محاطی}) \widehat{DAC} = \frac{\widehat{DC}}{2} \Rightarrow \widehat{DC} = 2\alpha$$

$$(\text{زاویه محاطی}) \widehat{ADC} = \frac{\widehat{ABC}}{2} \Rightarrow \widehat{ADC} = 20^\circ$$

$$(\text{زاویه محاطی}) \widehat{ABD} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{AD} = 80^\circ$$

$$\widehat{AD} + \widehat{DC} + \widehat{ABC} = 360^\circ \Rightarrow 80^\circ + 2\alpha + 20^\circ = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 2\alpha = 260^\circ \Rightarrow \alpha = 130^\circ$$

متوسط

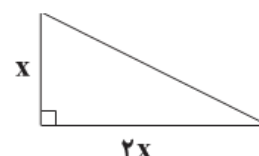
تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۵۹

در هر مثلث شعاع دایره محیطی داخلی از رابطه $r = \frac{S}{P}$ و شعاع دایره محیطی خارجی رو به ضلع a از رابطه $r_a = \frac{S}{P-a}$ به دست می‌آید که S مساحت مثلث و P نصف محیط آن است. اگر طول اضلاع زاویه قائمه مثلث را x و $2x$ فرض کنیم، طبق قضیه فیثاغورس، طول وتر آن به دست می‌آید:

$$\text{طول وتر} = \sqrt{x^2 + (2x)^2} = \sqrt{5}x$$



$$P = \frac{x + 2x + \sqrt{5}x}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}x$$

$$P - a = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}x - \sqrt{5}x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}x$$

$$\frac{\text{شعاع دایره محیطی داخلی}}{\text{شعاع دایره محیطی خارجی وتر}} = \frac{\frac{S}{P}}{\frac{S}{P-a}} = \frac{P-a}{P}$$

$$= \frac{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}x}{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}x} = \frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \times \frac{3 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}$$

$$= \frac{9 + 5 - 6\sqrt{5}}{9 - 5} = \frac{14 - 6\sqrt{5}}{4} = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$$

ساده

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

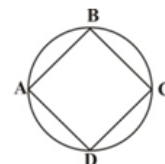
سوال ۶۰

قضیه را در دو حالت اثبات می کنیم:

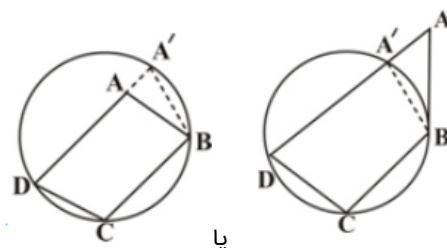
(الف) فرض می کنیم چهارضلعی محاطی است، ثابت می کنیم مجموع زوایای مقابل آن 180° است. چون محاطی است، پس ۴ راس آن روی محیط یک دایره قرار دارد.

$$\widehat{ABC} = \frac{ADC}{2} \text{ محاطی}, \widehat{ADC} = \frac{ABC}{2} \text{ محاطی}$$

$$\rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ADC} = \frac{ADC + ABC}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$



(ب) فرض می کنیم مجموع هر دو زاویه مقابل آن 180° باشد، ثابت می کنیم چهارضلعی محاطی است. با برهان خلف ثابت می کنیم. می دانیم از هر سه نقطه غیر واقع بر یک خط راست یک دایره می گذرد (زیرا مثلث محاطی است) اگر این دایره از A نگذرد، خط DA را در نقطه دیگری مانند A' قطع می کند که یا A' بین D و A و یا A بین D و A' است. اکنون چهارضلعی A'BCD محاطی است و بنابراین زوایای C و B A'D مکمل یکدیگرند در نتیجه باید A' و D A'B مساوی باشند که امکان ندارد. پس فرض خلف محاطی بودن رد می شود و چهارضلعی محاطی است.



یا